

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
28		Емельянов	Ем
Шифр			120201

$$\begin{array}{r} 1/2/3/4/5/6 \\ 7/7/7/7/7/7 \\ \hline 28 \end{array}$$

1. $x > y \Rightarrow x - y > 0$; знаменатель не $= 0$; $x > y > 0 \Rightarrow xy > 0$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Добавим в обе части равенства $\frac{6}{3}xy = 2xy$:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{16}{3}xy \Rightarrow (x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$x+y = \frac{\sqrt{16xy}}{\sqrt{3}} \quad (xy > 0)$$

Теперь из обеих частей исходного равенства вычтем $\frac{6}{3}xy = 2xy$:

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3}xy \Rightarrow (x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$x-y = \frac{\sqrt{4xy}}{\sqrt{3}} \quad (xy > 0)$$

$$\text{Итого: } \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{\sqrt{16xy}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4xy}}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Пример: } x=3; y=1: \frac{4}{2} = 2, \text{ а также } x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Ответ: 2.

2. $a \geq 1$; $b \geq 2$; $c \geq 3$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 + a_1 \\ b = 2 + b_1 \\ c = 3 + c_1 \end{array} \right\} a_1, b_1, c_1 - \text{положит. числа.}$$

Будем действовать методом от противного:] $a+b+c < 7$

$$a^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1$$

$$b^2 = b_1^2 + 4b_1 + 4$$

$$c^2 = c_1^2 + 6c_1 + 9$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1 \\ b^2 = b_1^2 + 4b_1 + 4 \\ c^2 = c_1^2 + 6c_1 + 9 \end{array} \right\} a^2 + b^2 + c^2 = 14 + 2a_1 + 4b_1 + 6c_1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

Ещё уточним: $a+b+c = 6 + a_1 + b_1 + c_1 < 7$ (по методу от противного)

$$\downarrow$$

$$a_1 + b_1 + c_1 < 1$$

$$\downarrow$$

$$a_1 < 1; b_1 < 1; c_1 < 1$$

$$\downarrow$$

$$a_1^2 < 1; b_1^2 < 1; c_1^2 < 1 \quad (\text{т.к. } a, b \text{ и } c > 0 \text{ и } < 1)$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

040201

Итого: $a^2 + b^2 + c^2 = 14 + (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 2a_1 + 4b_1 + 6c_1 \geq 21$

↓

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 2a_1 + 4b_1 + 6c_1 \geq 7$$

$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 < 1$, т.к. $a_1^2 < a_1$,
 $b_1^2 < b_1$ и $a_1 + b_1 + c_1 < 1$
 $c_1^2 < c_1$

Тогда

$$2a_1 + 4b_1 + 6c_1 > 6 \quad | :2$$

$$a_1 + 2b_1 + 3c_1 > 3$$

$$a_1 + b_1 + c_1 < 1$$

$$\Rightarrow b_1 + 2c_1 > 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 < 1 \\ b_1 + 2c_1 > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 > 1$$

невозможно.

Значит, имеем, что $a + b + c < 7$ ошибочно $\Rightarrow a + b + c \geq 7$

ч. т. д.

$$3. \quad a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Итого: $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$

$$a_2: \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$a_3: \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$a_4: \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

...

$$a_{98}: \frac{97}{98} \cdot \left(\frac{99}{98}\right)^3$$

$$a_{99}: \frac{98}{99} \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^3$$

Заметим, что $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ и т.д.

От $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{99}$ осталось:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{99}{98}\right)^2 \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{99}\right)^3 \cdot \left(\frac{99}{2}\right)^2 = \frac{100^3 \cdot 99^2}{99^3 \cdot 2^3} = \frac{100^3}{99 \cdot 2^3} = \left(\frac{50^3}{99}\right)$$

Ответ: $\frac{50^3}{99}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

4. $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$. $\Delta = p^2 + \frac{2}{p^2} > 0$ при любых $p \in \mathbb{R}$

Значит корни есть всегда.

по теореме Виета: $x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \Rightarrow 2x_1 x_2 = -\frac{1}{p^2}; 2x_1^2 x_2^2 = \frac{1}{2p^4}$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$

Нужно г-то:

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2\sqrt{2} \quad | -2$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \quad | -\sqrt{2}$$

$$p^4 - \sqrt{2} + \frac{1}{2p^4} \geq 0 \quad \left| \text{сократим до кв: } \left(p^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2 \right.$$

$$\left(p^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2 \geq 0 \text{ — это верно, т.к. любое число в степ. 2}$$

будет ≥ 0

ч.т.д.