

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17	20.03	Коракшвеле Е.Е.	И

1 2 3 4 5 6
3 7 0 2 5 47

N1.

Пусть x, y, z, w — цифры числа

Тогда его отношение к сумме цифр:

$$d = \frac{1000x + 100y + 10z + w}{x + y + z + w}$$

$$d = \frac{999x + 99y + 9z + 1}{x + y + z + w} + 1 = \frac{9(111x + 11y + z)}{x + y + z + w} + 1$$

т.е. d не зависит от w , а при большем z d увеличивается, а при больших x и y — уменьшается. Тогда, т.к.

число четырехзначное, $x=1, y=0, z=9, w=9$, т.е. 1099

Ответ: 1099.

N2.

$$1. 0 < x < \frac{1}{2}; 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$2. y^2 - x^2 > y - x$$

$$y^3 - x^3 > y - x$$

Обозначим $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$

Рассмотрим $y^2 - x^2 > y - x$. Получаем, что $(y-x)(x+y-1) > 0$

т.к. $x+y$ меньше единицы, то $(y-x)$ — отрицательное число

Рассмотрим $y^3 - x^3 > y - x$. Получаем, что $(y-x)(y^2 + xy + x^2 - 1) > 0$

т.к. $x+y < 1$, то $(x+y)^2 < 1$, а $(x+y)^2 - xy = y^2 + xy + x^2$, поэтому $(y^2 + xy + x^2) < 1$. т.е. $(y^2 + xy + x^2 - 1) < 0$, а т.к. $(y-x) < 0$, то $y^3 - x^3 > y - x$. т.н.д.

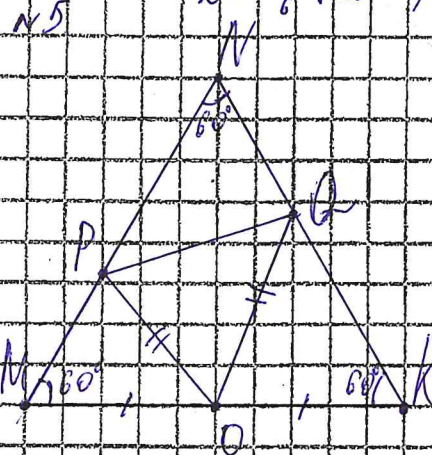
N4.

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$$

И правая, и левая стороны уравнения принимают значения в диапазоне $[-2026; 2026]$. Поэтому ограничений на выбор нет. Известно, что уравнение

решение $\sin x = \cos 2x$. Отсюда, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Пусть a — сторона треугольника MNK .

$MP = p; KQ = q; PO = OQ = \frac{1}{3}d$

Запишем теорему косинусов для $\triangle KOQ$ и $\triangle MPO$:

$$\begin{cases} d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot p \cos 60^\circ \\ d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot q \cos 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 - \frac{ap}{2} = q^2 - \frac{aq}{2} \end{cases}$$

$$p^2 - \frac{ap}{2} = q^2 - \frac{aq}{2} \Rightarrow (p+q - \frac{a}{2})(p-q) = 0$$

П.к. при $p=q$ $PQ \parallel MK$, то ед. решение этого уравнения $p+q = \frac{a}{2}$

Запишем теорему косинусов для $\triangle PNQ$:

$$PQ^2 = (a-p)^2 + (a-q)^2 - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot (a-p)(a-q)$$

$$PQ^2 = a^2 - ap - aq + p^2 + q^2 - pq$$

$$PQ^2 = a(a - (p+q)) + (p+q)^2 - 3pq \Rightarrow PQ^2 = \frac{3a^2}{4} - 3pq = 3\left(\frac{a^2}{4} - pq\right)$$

Соответственно, макс значение PQ при $pq=0$ (лиш к нулю стремиться, но не достигается)

Минимальное же значение, когда PQ при $p=q = \frac{a}{4}$ (это значение не достигается)

Значит $PQ \in \left(\frac{3}{4}a; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Плюс еще $\triangle MNK: S=1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Отсюда $PQ \in \left(\frac{\sqrt{27}}{2}; \sqrt{3}\right)$

Ответ: $PQ \in \left(\frac{\sqrt{27}}{2}; \sqrt{3}\right)$