Место для скобы

Шифр 024-2-М-50

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17б (семнадцать)	18.03.24	Лугина Н. Э.	

№ 1

$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d} = min$

$a; b; c; d; \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;0\}; a > 0$

$\begin{cases} 111a + 11b + c = min \\ a+b+c+d = max \end{cases} \Rightarrow d = 9$

$\frac{111a+11b+c}{a+b+c+9} = min$

При увеличении a на 1: $a+b+c+9$ увеличивается на 1, а $111a+11b+c$ увеличивается на 111 $\Rightarrow a = min; a = 1$

При увеличении b на 1: $a+b+c+9$ увеличивается на 1, а $111a+11b+c$ увеличивается на 11 $\Rightarrow b = min; b = 0$

При увеличении c на 1: $a+b+c+9$ увеличивается на 1 и $111a+11b+c$ увеличивается на 1 $\Rightarrow c = max = 9$

Тогда искомым является число 1099

Ответ: 1099 7б

№ 2

$y^2 - x^2 > y - x \Rightarrow (y-x)(y+x-1) > 0$; x и $y \in (0; \frac{1}{2})$

Если $y > x$; $y + x - 1 > 0 \Rightarrow y + x > 1$; но $(y+x)_{max} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Если $y = x$; $y - x = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$, что неверно

Если $y < x$: $y + x - 1 < 0 \Rightarrow y + x < 1 \Rightarrow y < x$

$y^3 - x^3 > y - x \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2-1) > 0$; $y < x \Rightarrow$ 4б

$\Rightarrow y^2 + x^2 + xy - 1 < 0$

$y^2 + xy + x^2 < 1 \Rightarrow \cancel{(y+x)^2 < xy; x < \frac{1}{2}; y < \frac{1}{2} \Rightarrow}$

$\Rightarrow$ т.к. $\cancel{y^2 < \frac{1}{4}}$ $y < \frac{1}{2}$; $x < \frac{1}{2}$, то $y^2 < \frac{1}{4}$; $xy < \frac{1}{4}$; $x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 + xy + x^2 < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ что x и y удовлетворяют условиям, что и тр. д-вать.

№ 4

Пусть $P(t) = t + t^{2023} + 2024t^{2025}$, тогда $P(\cos(2x)) = P(\sin x)$

Т.к. в $P(t)$ при всех четных степенях стоят нули, то ~~для~~ выр-ние будет иметь единственное знач t для каждого $P \Rightarrow$ что $\cos(2x) = \sin x \Rightarrow$

$1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z \\ x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k; k \in Z \end{array}\right.$

3б

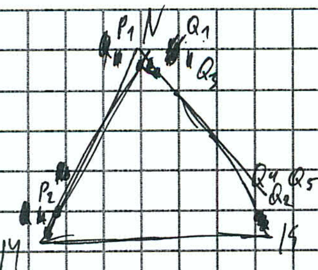
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = (-1)^k \cdot \frac{-\pi}{6} + \pi k$; $k \in Z$

№ 5

Дано: равностор △ MNK

$S_{MNK} = 1$

$P \in MN$; $Q \in NK$; $PQ \nparallel MK$



А где середина МК по условию равноуд.

Пусть точки P_2 и Q_2 → ~~максимально~~ предельно близки к M и K соотв, а P_1 и Q_1 → предельно близки к N, тогда P_1Q_1 – наим. возможное PQ, но, т.к △ MNK – равностор, а NP_1 и NQ_1 равны, то $P_1Q_1 \parallel MK$, что не удовл усл ⇒

⇒ ~~у~~ ~~такой на~~ NK будет такое Q_3, что оно будет предельно близко к Q_1, тогда P_1Q_3 будет предельно близок по длине к P_1Q_1 но не будет $\parallel MK$; $P_1Q_3 > P_1Q_1 > 0$; $P_1Q_3 \approx 0$

~~P_2 и Q~~

Рассм окр (P_2) с центром в т P_2 и $R = P_2Q_1$; она второй раз пересечет окр в т Q_4, близкой к Q_2, то есть $P_2Q_1 = P_2Q_4 < P_2Q_2$, т.к P_2Q_4 ближе к положению ⊥, чем P_2Q_2
(радиусы)

Но $P_2Q_2 \parallel MK$ (~~то~~) т.к $NP_2 = NQ_2$; $NM = NK$, что не удовл усл, тогда мы возьмем Q_5, предельно близкую к Q_2, тогда P_2Q_5 будет предельно близок к P_2Q_2, но не $\parallel MK$: $P_2Q_5 < P_2Q_2 < MK$

$P_2Q_5 \approx MK$

~~(Точнее образом PQ_{min} = длине 3х равностоящих на одной прямой точек)~~

Тогда PQ_{min} = расстоянию между 2мя крайними из любых эквидистантных на прямой точек

$PQ_{max} = MK$ – расстояние между любыми 2мя равностоящими на прямой точками.

что при грубом округлении можно привести к виду $PQ \in (0; MK)$

т.к $S_{MNK} = 1$ (~~кв~~); $S_\triangle = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, то $MK = \sqrt{\frac{1 \cdot 4}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ ✓

0б.

Ответ: $PQ \in \left(0; \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)$

№ 3

$-P_{17} + P_{101} = a_{101}x^{101} + a_{100}x^{100} + \dots + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} = 0 \Rightarrow x \le 0$

при $x = 0$: $P_{17} = 0$, что не удовл усл $P_{17} = 2024 \Rightarrow x < 0$

частные случаи ни к чему не ведут

$P_{17} = a_0 + a_1x + \dots + a_{16}x^{16} + a_{17}x^{17} = 2024$

$x^{17} < 0$, $x^{16} > 0$; $|x^{17}| > |x^{16}| \Rightarrow |a_1|x + |a_2|x^2 + \dots + |a_{16}|x^{16} + |a_{17}|x^{17} < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_0 \ne |a_1|x + \dots + |a_{17}|x^{17} + 2024 \\ a_0 < 0 \end{array}\right.$

$|a_0| < 999 \Rightarrow a_0 \ne |a_1|x + \dots + |a_{17}|x^{17} + 2024 \Rightarrow a_0 < 0 \Rightarrow a_0 \in (-999; 0)$

0б.

Ответ: $a_0 \in (-999; 0)$