

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
16		Корешков	И
Шифр			042019

✓ 1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

$$x^2 - \frac{10}{3} xy + y^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{100}{9} y^2 - 4y^2 = \left(\frac{100}{9} - \frac{36}{9}\right) y^2 = \frac{64}{9} y^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{\frac{10}{3} y + \sqrt{\frac{64}{9} y^2}}{2} = \frac{\frac{10}{3} y + \frac{8}{3} y}{2} = \frac{\frac{18}{3} y}{2} = \frac{18y}{2 \cdot 3} = 3y$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{\frac{10}{3} y - \frac{8}{3} y}{2} = \frac{\frac{2}{3} y}{2} = \frac{1}{3} y$$

По усл.: $x > y \Rightarrow x = 3y$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\frac{4y^2}{2y} = 2$$

Ответ: $\frac{x+y}{x-y} = 2$

✓

✓ 2

$$\begin{cases} a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 21 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12

Пусть: $a = 1, b = 2, c = 3$, то $1 + 4 + 9 = 14$, а $14 \leq 21$
соответственно $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ не верно!

$$a^2 + b^2 + c^2 = 21$$

$$1 + 4 + 16 = 21$$

$$21 = 21$$

$$\Rightarrow a \geq 1, b \geq 2, c \geq 4$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 2 \\ c \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq 1 \\ b^2 \geq 4 \\ c^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$a + b + c \geq 1 + 2 + 4$$

$$a + b + c \geq 7$$

ч.г.г. ✓

✓ 3

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n}{n^4} \\ &= \frac{2n(n-1)(n+1) + (n-1)(n+1)(n^2+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(2n+n^2+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(n+1)(n+1)}{n^4} \\ a_n &= \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} \end{aligned}$$

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$a_2 = \frac{1 \cdot 3^3}{2^4}, a_3 = \frac{2 \cdot 4^3}{3^4}, a_4 = \frac{3 \cdot 5^3}{4^4}, a_5 = \frac{4 \cdot 6^3}{5^4}$$

$$a_{96} = \frac{95 \cdot 97^3}{96^4}, a_{97} = \frac{96 \cdot 98^3}{97^4}, a_{98} = \frac{97 \cdot 99^3}{98^4}, a_{99} = \frac{98 \cdot 100^3}{99^4}$$

Умножаем:

$$\frac{1 \cdot 3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \frac{4 \cdot 6^3}{5^4} \cdot \dots \cdot \frac{95 \cdot 97^3}{96^4} \cdot \frac{96 \cdot 98^3}{97^4} \cdot \frac{97 \cdot 99^3}{98^4} \cdot \frac{98 \cdot 100^3}{99^4}$$

Итого:

$$= 1262 \frac{62}{99}$$

Ответ: $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = 1262 \frac{62}{99}$

✓4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

по Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

$$2\text{-е: } x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

Док-во

Неравенство Коши

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 \geq x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 \Rightarrow$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2(x_1x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 \cdot \frac{1}{p^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{1}{2p^4}$$

$$0 \geq \frac{1}{2p^4} - (2 + \sqrt{2})$$

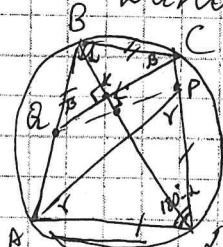
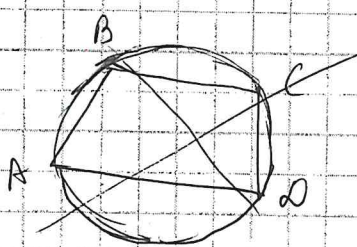
$\frac{1}{2p^4} \Rightarrow$ положительная дробь, т.к. $p^4 \geq 0$, всегда меньше 1.

$2 + \sqrt{2}$ — число больше 1 $\Rightarrow$ при любых p $2 + \sqrt{2} \geq \frac{1}{2p^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ верно

ч.т.д. $\square$

✓5



Дано:

ч/у ABCD — вписанный в окружность

$$DP = DA$$

$$BQ = BC$$

Верно ли, что $QL = PL$?

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

- 1) Вокруг ч/у $ABCD$ описана окружность $\Rightarrow \angle B + \angle D = 180^\circ$
 $\angle A + \angle C = 180^\circ$
- 2) $\triangle QBC$, Пусть $\angle B = \alpha \Rightarrow \angle D = 180^\circ - \alpha$
 $\triangle QBC$ - равнобедренный (по усл.) $\Rightarrow \angle BQC = \angle BCQ = \angle B$
 $\triangle ADP$ - равнобедренный (по усл.) $\Rightarrow \angle \overset{QAP}{APD} = \angle DPA = \angle \gamma$
- 3) $\triangle QBC$: $\alpha + 2\gamma = 180^\circ$
 $\triangle ADP$: $180^\circ - \alpha + 2\gamma = 180^\circ$
 $\alpha = 2\gamma$
 $\alpha = \frac{2\alpha}{2}$
Не вышло! $\angle B$ в 2 раза больше чем $\angle QAP$
- 4) $\angle APD = \angle ABD$ (опираются на одну и ту же дугу) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ABD = \angle \gamma = \frac{\alpha}{2}$
 $\angle B = \angle ABD + \angle CBD$
 $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$
 $\triangle QBK$ и $\triangle CKB$
 $QB = BC$ (по усл.)
 BK - общ.
 $\angle QBK = \angle CKB$ (н.) $\Rightarrow \triangle QBK = \triangle CKB$ (по I признаку рав-ва $\triangle$) $\Rightarrow$
 $\triangle QBC$ - равнобедр. $\Rightarrow QK = KC$
 BK - высота, медиана, биссектриса $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$
 $\triangle QBK$ - прямоугольный: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{QK}{QB}$
 $\triangle CKB$ - прямоугольный: $\sin 90^\circ - \alpha = \frac{KC}{CB}$