

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
22		Корякинский	М
Шифр			042035

№1 $g = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$ - функция трёх переменных

$$g'(a) = 2(7+a-b) + 0 - 2(9+c-a) = 14 + 2a - 2b - 18 - 2c + 2a = 4a - 2b - 2c - 4 = 0$$

$$g'(b) = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) + 0 = -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10 = 0$$

$$g'(c) = 0 - 2(2+b-c) + 2(9+c-a) = -4 - 2b + 2c + 18 + 2c - 2a = -2a - 2b + 4c + 14 = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 & (1) \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 & (2) \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2): 4a - 2b - 2c - 4 + 2a - 4b + 2c + 10 = 0$$

$$6a - 6b + 6 = 0 \quad | :6$$

$$a = b - 1 \quad - \text{ подставим в (3):}$$

$$-2(b-1) - 2b + 4c + 14 = 0$$

$$-2b + 2 - 2b + 4c + 14 = 0$$

$$4c - 4b + 16 = 0 \quad | :4$$

$$c = b - 4$$

$$\begin{cases} a = b - 1 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = b - 4 \end{cases}$$

Подставим значения в функцию g

$$g = (7+b-1-b)^2 + (2+b-b+4)^2 + (9+b-4-b+1)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$$

Ответ: 108

№2. $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$$

$$P(x) = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

1	2	3	4	5	Σ
5	7	4	0	3	19

все сдвигаются
на 1

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = X_1^2 \cdot Q(X_1) - X_1 + 506 + X_2^2 \cdot Q(X_2) - X_2 + 506 + X_3^2 \cdot Q(X_3) - X_3 + 506 + X_4^2 \cdot Q(X_4) - X_4 + 506$$

Т.к. X_1, X_2, X_3, X_4 - корни $Q(X)$, то $Q(X_1) = Q(X_2) = Q(X_3) = Q(X_4) = 0$

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = -X_1 + 506 - X_2 + 506 - X_3 + 506 - X_4 + 506 = 2024 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$

Т.к. X_1, X_2, X_3, X_4 - корни $Q(X)$, то $Q(X)$ можно представить как:

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)(X - X_4) = (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X^2 - XX_3 - XX_4 + X_3X_4) = \\ &= X^4 - X^3(X_3 + X_4) - X^3X_2 + X^2X_3X_4 + X^2X_2X_3 + X^2X_2X_4 - XX_2X_3X_4 - X^3X_2 - X^3X_1 + \\ &+ X^2X_1X_3 + X^2X_1X_4 - XX_1X_3X_4 + X^2X_1X_2 - XX_1X_2X_3 - XX_1X_2X_4 + X_1X_2X_3X_4 = \\ &= X^4 - X^3(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + X^2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_2X_4) + \\ &+ X(X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_2X_3X_4 + X_1X_3X_4) + X_1X_2X_3X_4 \end{aligned}$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов:

$$Q(X) = X^4 + 1X^3 - 4X^2 + 1$$

$$Q(X) = X^4 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \cdot X^3 + X^2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4) + X(X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_2X_3X_4 + X_1X_3X_4) + X_1X_2X_3X_4$$

$$Q(X) = Q(X) \Rightarrow 1 = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \quad (\text{коэффициенты перед } X^3 \text{ равны})$$

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = 2024 + 1 = 2025$$

Ответ: 2025

$$3. X^2 - 6\sqrt{X^2 + 1} + 11 - \cos\left(\frac{X^2 + \sqrt{2}X - 4}{18}\right) = 0$$

$$X^2 - 6\sqrt{X^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{X^2 + \sqrt{2}X - 4}{18}\right)$$

$$f(x) = X^2 - 6\sqrt{X^2 + 1} + 11$$

$$f(t) = t^2 - 6t + 11$$

$$f(t) = t^2 - 6t + 10$$

$$\sqrt{X^2 + 1} = t \Rightarrow X^2 + 1 = t^2 \Rightarrow X^2 = t^2 - 1$$

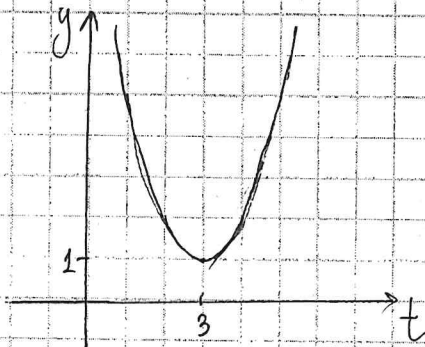
Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$t.M(t_0; y_0)$ - вершина параболы, ветви вверх

$$t_0 = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_0 = f(t_0) = 9 - 18 + 10 = 1$$

$$t.M(3; 1)$$



$y' = \begin{matrix} \text{min} \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \end{matrix} t$ т.к. $f(3)$ - вершина параболы

$$y_{\min} = y(3) = 1 \Rightarrow y = f(t) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$$

$$t^2 - 6t + 10 = 1$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0 \rightarrow t = 3$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8}$$

$$x = -\sqrt{8}$$

$$1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$$

$\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$ принимает значения от -1 до 1, т.е.

$$1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) \leq 1$$

Единственный случай когда это возможно:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

подставим значения в $\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$

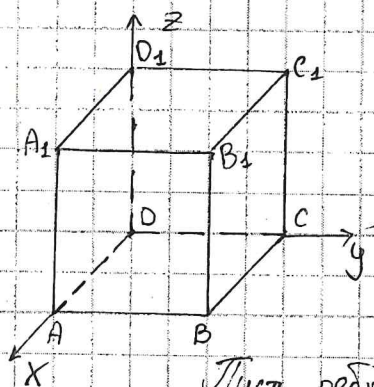
$$\cos\left(\frac{8 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{8}{18}\right) \neq 1$$

$$\cos\left(\frac{8 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}\right) = \cos 0 = 1 \Rightarrow -\sqrt{8} - \text{решение}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Ответ: $-\sqrt{8}$

5.



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$\alpha \perp A_1 C_1$

$\beta \parallel CD_1$

Найти: $\angle \beta_{\min}$

Решение:

Пусть ребро куба равно m

Введём систему координат и найдём координаты некоторых точек:

$A_1(m; 0; m)$
 $C_1(0; m; m)$ $\Rightarrow \overrightarrow{A_1 C_1}$ (направляющий вектор прямой $A_1 C_1$) имеет координаты $\{-m; m; 0\}$

$C(0; m; 0)$
 $D_1(0; 0; m)$ $\Rightarrow \overrightarrow{CD_1}$ (направляющий вектор прямой CD_1) имеет координаты $\{0; -m; m\}$

$\overrightarrow{A_1 C_1} \perp \alpha \Rightarrow \overrightarrow{A_1 C_1} = \vec{n}_1$ (вектор нормали к плоскости α) $\vec{n}_1 \{-m; m; 0\}$

$\beta \parallel CD_1$
 $\overrightarrow{CD_1} \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \overrightarrow{A_1 D_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_1 D_1}$ - вектор нормали к плоскости β , $\overrightarrow{A_1 D_1} = \vec{n}_2$

$\overrightarrow{A_1 D_1} \{-m; 0; 0\} \Rightarrow \vec{n}_2 \{-m; 0; 0\}$

Нет.

Угол между плоскостями α и β равен углу между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{m^2}{m\sqrt{2} \cdot m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{n}_1 \vec{n}_2 = \alpha \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

Ответ: 45°