Место для скобы

Шифр 024-2-M-47

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15б (пятнадцать)	18.03.24	Лугина И. Г.	[signature]

N 4

$\cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024 \cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \sin^{2025} x$

$f(x) = x + x^{2023} + 2024 \cdot x^{2025}$.

$f'(x) = 2024 \cdot 2025 x^{2024} + 2023 x^{2022} + 1$.

$f'(x)$ - всегда положительна (•) тогда $\Rightarrow f(x) - \uparrow$ (возрастает)

$f(\cos 2x) = \cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024 \cdot \cos^{2025} 2x$

$f(\sin x) = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \sin^{2025} x$.

$f(\cos 2x) = f(\sin x)$.

$\cos 2x = \sin x$.

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0. \mid \cdot(-1)$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 3^2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = -1$.

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

7б

Место для скобы

Шифр 024-2-М-47

№2

1) $0<x<\frac{1}{2}$; $0<y<\frac{1}{2}$

2) $y^2-x^2>y-x$.

$y^2-x^2-y+x>0$

$(y-x)(y+x)-(y-x)>0$

$(y-x)(y+x-1)>0$

корни выражения относительно x.

$x=y$ и $x=1-y$

$y \qquad 1-y \qquad x$

$0<y<\frac{1}{2}\ |\cdot(-1)$

$-\frac{1}{2}<-y<0\ |+1$

$\frac{1}{2}<1-y<1$

$1-y>y$

2) $y<x<1-y$

Доказать, что $y^3-x^3>y-x$

$y^3-y>x^3-x$.

$f(t)=t^3-t$, $\quad f'(t)=3t^2-1$

$f(y)=y^3-y$ $\quad 3t^2-1=0$

$f(x)=x^3-x$ $\quad t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(y)>f(x)$.

$-\frac{\sqrt3}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt3}{3}$

$y<x$

$x>y$.

$f'(t)$ - отриц. $\Rightarrow f(t)$ - $\downarrow$ (убывает)

$1,7<\sqrt{3}<1,8\ |:3$

$\frac{1,7}{3}<\frac{\sqrt3}{3}<0,6$

$0,5<\frac{1,7}{3}$

$\frac{1,5}{3}<\frac{1,7}{3}$

По 2 условию $y<x<1-y$

$\Rightarrow$ x и y удовлетворяют $y^3-x^3>y-x$

ч.т.д.

18

Шифр 024-2-11-47

№1.

Найти: $\overline{abcd}$, при котором $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}$ - min.

1) $y=\frac{1000x+999}{x+27}$, $y'=\frac{(1000x+999)'(x+27)-(x+27)'(1000x+999)}{(x+27)^2}$

y' - всегда >0 $\quad y'=\frac{1000x+27000-1000x-999}{(x+27)^2}$

$\Rightarrow y\uparrow$, при $x\uparrow$, $\quad y'=\frac{26001}{(x+27)^2}$

тогда y_{min}

при x_{min} $\Rightarrow a=1$.

2) $y=\frac{1099+100x}{x+19}$. $\quad y'=\frac{801}{(x+19)^2}>0 \Rightarrow y\uparrow$ при $x\uparrow$

тогда y_{min}, при x_{min} $\Rightarrow b=0$.

3) $y=\frac{1009+10x}{x+10}$ $\quad y'=\frac{-909}{(x+10)^2}<0 \Rightarrow y\downarrow$ при $x\uparrow$

тогда y_{min}, при x_{max} $\Rightarrow c=9$.

4) $y=\frac{1090+x}{x+10}$ $\quad y'=\frac{-1080}{(x+10)^2}<0 \Rightarrow y\downarrow$, при $x\uparrow$

тогда y_{min}, при x_{max} $\Rightarrow d=9$.

Таким образом искомое число 1099.

Проверка.

$\frac{1099}{19}\approx 57{,}84$ $\qquad \frac{1200}{3}=400$

$\frac{1099}{18}=62$ $\qquad \frac{1100}{2}=550$.

Ответ: 1099.

7б