Место для скобы

Шифр 09390

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23	25.03	Кофяклене Е.С.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
6	4	7	2	4	23

№2

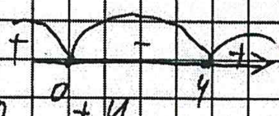
$x^2+kx+k=0$

$D=k^2-4k$

$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4k}}{2}$

$k^2-4k\geq 0$

$k(k-4)\geq 0$

$k=0$ $k=4$  в k не входит промежуток от 0 до +4

нужно чтобы ~~в~~ $-k\pm\sqrt{k^2-4k}$ было чётным числом $\Rightarrow k^2-4k=2n$?

$k^2-4k-2n=0$

$$\begin{cases} k_1+k_2=4 \\ k_1\cdot k_2=-2n \end{cases}$$

также чтобы получить целое число нам нужно чтобы из $\sqrt{D}$ извлекалось ~~x~~ целое число для этого нужно чтобы половина квадрата k $(\frac{1}{2}k^2)$ была квадратом целого числа

Ответ: ~~На~~ из уравнения $k^2-4k-2n=0$ должны получится такие корни, чтобы их сумма

была равна 4, произведение чётным числом,
а $\frac{1}{2}k^2$ было квадратом какого-то числа

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 4 \\ k_1 \cdot k_2 = 2n \\ \sqrt{\frac{1}{2}k^2} = \text{целое число} \end{cases}$$

№1

$$3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} = (3^{31})^2 - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2\cdot 3^{31}\cdot 2^{18} - 2\cdot 3^{31}\cdot 2^{18} + (2^{18})^2 =$$

$$= \underbrace{(3^{31})^2 + 2\cdot 3^{31}\cdot 2^{18} + (2^{18})^2}_{(3^{31}+2^{18})^2} - 3\cdot 3^{31}\cdot 2^{18} = (3^{31}+2^{18})^2 - 3^{32}\cdot 2^{18} =$$

$$= (3^{31}+2^{18})^2 - (3^{16}\cdot 2^{9})^2 = (3^{31}+2^{18} - 3^{16}\cdot 2^9)(3^{31}+2^{18}+3^{16}\cdot 2^9)$$

составное число - число которое имеет больше двух делителей (1 и самого себя)

$$3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} = (3^{31}+2^{18} - 3^{16}\cdot 2^9)(3^{31}+2^{18}+3^{16}\cdot 2^9)$$

пусть первый множитель равен 1

$$3^{31} + 2^{18} - 3^{16}\cdot 2^9 = 1$$

$$3^{31} = 3^{16}\cdot 2^9 - 2^{18} + 1$$

$$3^{31} = 2^9(3^{16} - 2^9) + 1 \quad |:2^9$$

$$\frac{3^{31}}{2^9} = 3^{16} - 2^9 + \frac{1}{2^9}$$

$1{,}5^9\cdot 3^{22} = 3^{16} - 2^9 + \frac{1}{2^9}$ - не верно поскольку целая часть слева превосходит целую часть справа ($1{,}5^9\cdot 3^{22} > 3^{16} - 2^9$) следовательно, множитель $3^{31}+2^{18}-3^{16}\cdot 2^9 \neq 1$, и, ~~соственно~~ соответственно множитель

Место для скобы

Шифр 09390

$3^{31}+2^{18}+3^{16}\cdot2^{9}\neq3^{62}-3^{31}\cdot2^{18}+2^{36}$ следовательно число $3^{62}-3^{31}\cdot2^{18}+2^{36}$ имеет множители не равные 1 и самому себе. Значит оно составное.

№4

$$\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}^{\backslash b+1}-\frac{a+1}{b+1}^{\backslash b}\right)+\left(\frac{b}{c}^{\backslash c+1}-\frac{b+1}{c+1}^{\backslash c}\right)+\left(\frac{c}{a}^{\backslash a+1}-\frac{c+1}{a+1}^{\backslash a}\right)\neq0$$

$$\frac{\cancel{ab}+a-\cancel{ab}-b}{b(b+1)}+\frac{\cancel{bc}+b-\cancel{bc}-c}{c(c+1)}+\frac{\cancel{ca}+c-\cancel{ac}-a}{a(a+1)}\neq0$$

$$\frac{a-b}{b(b+1)}+\frac{b-c}{c(c+1)}+\frac{c-a}{a(a+1)}\neq0$$

в любом случае 2 дроби положительны, а третья отрицательная, сумма двух положительных больше отрицательной по модулю.

№3

X кг - 1ый брусок X' - % золота в первом бруске

Y кг - 2ой брусок Y' - % золота во 2ом бруске

Z кг - 3ий брусок 0 % золота в 3ем бруске

1ый сплав - $0,3(X+Y)$ - ~~из 1го сплава~~ кг золота

2ой сплав - $0,2(X+Z)$ кг золота

3ий сплав - $0,2(Y+Z)$ кг золота

$(1+2+3)$ сплавы = ~~$(0,3)(X+Y)$ кг~~ $0,3(X+Y)+0,2(X+Z)+0,2(Y+Z)$ $=0,5X+0,5Y+0,4Z$ кг. золота

Место для скобы

Шифр 09390

т.к. в сплаве (1+2+3) было по 2 раза каждого бруска, то при сплаве 2 и 3 бруска будет $\frac{0,5X+0,5Y+0,4Z}{2}=$
$=0,25X+0,25Y+0,2Z$ кг. золота в сплаве 3х брусков

$$\begin{cases} X'\cdot X+Y'\cdot Y=0,3(X+Y) \text{ - из первого сплава} \\ XX'+0\cdot Z=0,2(X+Z) \text{ - из 2го сплава} \\ YY'+0\cdot Z=0,2(Y+Z) \text{ - из 3го сплава} \end{cases}$$

$$\begin{cases} XX'+YY'=0,3X+0,3Y \\ XX'=0,2X+0,2Z \\ YY'=0,2Y+0,2Z \end{cases}$$

$0,2X+0,2Z+0,2Y+0,2Z=0,3X+0,3Y$

$0,4Z=0,1X+0,1Y \quad |:2$

$0,2Z=0,05X+0,05Y$

$0,2Z=0,05X+0,05Y \Rightarrow Z=0,25X+0,25Y$

Значит 3ий брусок весит как $\frac{1}{4}$ 1го и 2го бруска вместе

$X+Y$ - 30% $\Rightarrow$ $0,3(X+Y)$ кг золота

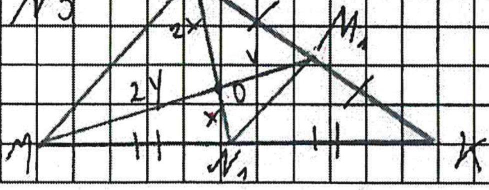
Z - 0% $\quad$ 0 кг золота

общая масса 3 брусков $=1,25(X+Y)$ кг

$\frac{0,3\cancel{(X+Y)}}{1,25\cancel{(X+Y)}}\cdot 100\% = \frac{30\cdot 100\%}{125} = 24\%$

Ответ 24%

№5



$\angle MON < 90°$

Док-ть: $MK+NK>3MN$

Место для скобы

Шифр

1) $NM_1 < NO + OM_1$ $MK + NK > MN$

$MN_1 < MO + ON_1$

2) $\frac{1}{2} NK < NO + OM_1$

$\frac{1}{2} MK < MO + ON_1$

3) $\frac{1}{2}(NK + MK) < NO + MO + OM_1 + ON_1$

$NK + MK < 2NO + 2MO + 2OM_1 + 2ON_1$

$MN < NO + MO$ $2MN < 2NO + 2MO$

$M_1N_1 = \frac{1}{2} MN$ $M_1N_1 < OM_1 + ON_1$

$MN = 2M_1N_1$ $2M_1N_1 < 2OM_1 + 2ON_1$

$MN < 2OM_1 + 2ON_1$

$3MN < 2NO + 2MO + 2OM_1 + 2ON_1$

откуда

$3MN < 2NO + 2MO + 2OM_1 + 2ON_1$

$1,5MN < NK + MK < 2NO + 2MO + 2OM_1 + 2ON_1$

1) $MN_1 > MO$ $\Rightarrow$ $2MN_1 > MO + ON_1$, $MK > MO + ON_1$

$MN_1 > ON_1$

2) $NM_1 > NO$ $\Rightarrow$ $2NM_1 > NO + OM_1$, $NK > NO + OM_1$?

$NM_1 > OM_1$ $\Rightarrow$ $MK + NK > MO + NO + OM_1 + OM_1$

$MK + NK > MN + \frac{1}{2} MN$ $\frac{3}{2}$, а надо 3

F