

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
168	12.03.25	Лугинский И.И.	<i>[подпись]</i>
Шифр			025-2-11-90

№1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Замена: } (7+a-b) = c \\ (9+c-a) = f \\ (2+b-c) = d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 + f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c + d + f = (7+a-b) + (2+b-c) + (9+c-a)$$

$$c + d + f = 7 + \cancel{a} - \cancel{b} + 2 + \cancel{b} - \cancel{c} + 9 + \cancel{c} - \cancel{a}$$

$$c + d + f = 7 + 2 + 9 \quad \text{Чтобы найти минимальное значение, для начала нужно найти среднее}$$

$$c + d + f = 18 \quad \text{Находим среднее значение чисел:}$$

$$c = d = f \Rightarrow \frac{18}{3} = 6 - \text{среднее значение чисел} \Rightarrow$$

$$c^2 + d^2 + f^2 = 3 \cdot 6^2 = 3 \cdot 36 = 108$$

Ответ: Минимальное значение выражения = 108

*нет явной оценки
по формуле о среднем*

48

№2

$$\text{Дано: } P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Найти: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

$$\text{Решение: } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506}{x^4 + x^3 - 4x^2 + 1} \Rightarrow x^2 \cdot Q(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 \Rightarrow$$

т.к. Первая часть частного $-x^2$, потому что x^6 делится на x^4

Находим остаток из $x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$$\text{Остаток} = (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506) - (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2) = \cancel{x^6} + \cancel{x^5} - \cancel{4x^4} + \cancel{x^2} - x + 506$$

$$-x + 506 \Rightarrow P(x) = x^2 Q(x) + (-x + 506)$$

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями $Q(x)$, то $Q(x_i) = 0 \Rightarrow$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			025-2-10-90

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 506) + (-x_2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \cdot 506$$

По теории Виета ^{для многочлена} $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$ сумма корней =

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 4 \cdot 506 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: Сумма корней $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x) = 2025$

н/з

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 0 \quad \text{Замечая } t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1$$

Если $t = \sqrt{x^2+1}$, то $x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow (t^2 - 1) - 6t + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 0$

$$t^2 - 1 - 6t + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 0$$

$$t^2 - 6t + 10 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 0$$

$$t^2 - 6t + 10 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 0$$

Рассмотрим: $t^2 - 6t + 10 = (t-3)^2 + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (t-3)^2 + 1 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} \quad \text{Так как } (t-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (t-3)^2 + 1 \geq 1$$

при $-1 \leq \cos \leq 1$ $\emptyset$, значит уравнение возможно только, если $(t-3)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (t-3)^2 = 0$

$$\begin{aligned} t-3 &= 0 & t+3 &= 0 \\ t &= 3 & t &= -3 \end{aligned}$$

Так как $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			025-2-11-90

Проверка: Если $\cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 1$, значит $\frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{18} = 2\pi k$

Подставляем полученный x , он равен $2\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2(2\sqrt{2})-4} = \sqrt{4\sqrt{2}-4}$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}-4} = \sqrt{4\sqrt{2}-4}$$

Ответ: $x = 2\sqrt{2}$ *посторонний корень 45*

и 4

Дано: $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$

Док-затель: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

Решение: Для всех положительных чисел по неравенству среднего геометрического и среднего арифметического:

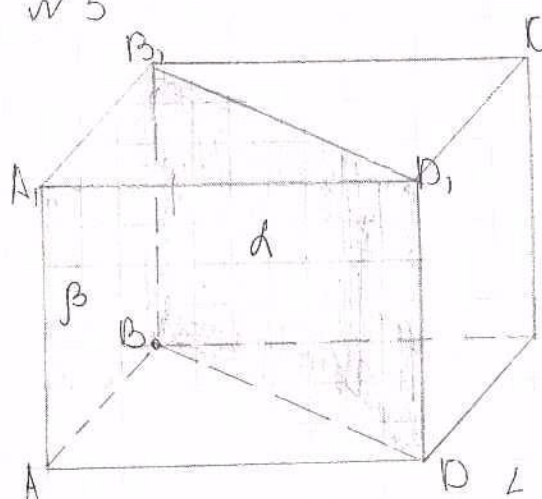
$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n$$

, так как все $x_i > 0$, из произведений минимально при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 \Rightarrow$ *15*

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}} \geq 1, \text{ значит } (x_1^{n-1} + 1)(x_2^{n-1} + 1) \dots (x_n^{n-1} + 1) \geq 1$$

Ответ: Неравенство доказано

и 5



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

плоскости α и β , $\alpha \perp A_1 C_1$; $\beta \perp CD_1$

Найти: миним. $\angle$ между α и β

Решение: $\alpha \perp A_1 C_1$, но она перпендикулярна точкам $B B_1, D_1 D$

$$B B_1 \perp CD_1 \Rightarrow B B_1 \parallel B D_1 C C_1$$

$\angle$ между α и β является $\angle A B D$ так $ABCD$ - квадрат, то $\angle A B C = 90^\circ$, BD - диаметр $\Rightarrow \angle A B D = 45^\circ$

Ответ: $\angle A B D = 45^\circ$ *05*