

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Найдите все тройки действительных чисел $(u; v; w)$, удовлетворяющих системе

уравнений:
$$\begin{cases} u + v \cdot w = 20, \\ v + w \cdot u = 20, \\ w + u \cdot v = 20. \end{cases}$$

Ответ: $(4; 4; 4)$, $(-5; -5; -5)$, $(1; 1; 19)$, $(1; 19; 1)$, $(19; 1; 1)$.

Решение: Вычтем из второго уравнения первое

$$(v - u) - w(v - u) = 0,$$

$$(v - u)(1 - w) = 0.$$

$$1) v = u \Rightarrow \begin{cases} v + w \cdot v = 20, \\ w + v^2 = 20. \end{cases} \Rightarrow (w - v) - v(w - v) = 0 \Rightarrow (w - v)(1 - v) = 0$$

Откуда следует, что $v = u = w$ или $v = u = 1$.

Если $v = u = w$, то $v = u = w = 4$ или $v = u = w = -5$.

Если $v = u = 1$, то $w = 19$.

$$2) w = 1 \Rightarrow \begin{cases} v + u = 20, \\ u \cdot v = 19. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 19, u = 1; \\ v = 1, u = 19. \end{cases}$$

2. Три целых числа записаны в ряд a, b, c . Под этими числами во второй строке записали числа $a - b, b - c, c - a$. Числа третьей строки и последующих строк образованы из чисел предыдущей строки по такому же закону. Возможно ли встретить число 2023 среди чисел строк ниже 15 строки?

Ответ: невозможно.

Решение.

Запишем несколько рядов согласно условию задачи:

a	b	c
$a - b$	$b - c$	$c - a$
$a - 2b + c$	$b - 2c + a$	$c - 2a + b$
$3(c - b)$	$3(a - c)$	$3(b - a)$
$3(c - b) - 3(a - c)$	$3(a - c) - 3(b - a)$	$3(b - a) - 3(c - b)$
...

Все числа следующих рядов кратны трем как разность чисел кратных трем.

Число 2023 не кратно трем, поэтому уже с третьего ряда не может встретиться в последовательности чисел.

3. Найдите $g(2021)$, если для любых действительных x, y выполняется равенство

$$g(x - y) = g(x) + g(y) - 2022(x + y).$$

Ответ: 4086462.

Решение. Подставим $x = y = 0$, получим

$$g(0) = g(0) + g(0) - 2022(0 + 0) \Rightarrow g(0) = 0.$$

Подставим $x = y$, получим

$$\begin{aligned} g(0) &= g(x) + g(x) - 2022(x + x) \Rightarrow g(x) = 2022x \Rightarrow \\ g(2021) &= 2022 \cdot 2021 = 4086462. \end{aligned}$$

4. Докажите, что при неравных между собой m, n, k

$$m^2(n - k) + n^2(k - m) + k^2(m - n) \neq 0.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} m^2(n - k) + n^2(k - m) + k^2(m - n) &= m^2n - m^2k + n^2k - n^2m + k^2m - k^2n = \\ &= n(m^2 - k^2) - mk(m - k) - n^2(m - k) = (m - k)(mn + nk - mk - n^2) = \\ &= (m - k)(m - n)(n - k) \neq 0 \text{ при неравных между собой } m, n, k. \end{aligned}$$

5. В выпуклом многоугольнике $MNKLP$ отрезок NL делит каждый из углов KNP и KLM пополам, а отрезок KP делит пополам каждый из углов MKL и NPL . Диагональ NP пересекает диагонали MK и ML в точках F и E . Верно ли, что $KF > LE$?

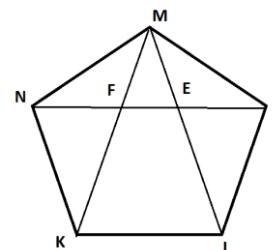
Ответ: нет, не верно.

Решение.

Треугольники FPK и LPK равны по стороне и прилежающим к ней углам (PK – общая). Следовательно, $KF = LK$. Аналогично, $LE = LK$.

Таким образом, получаем

$$\left. \begin{aligned} KF &= LK \\ LE &= LK \end{aligned} \right\} \Rightarrow KF = LE \Rightarrow KF \not> LE.$$



Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.