

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Совет ректоров вузов Томской области**  
**Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022**  
**МАТЕМАТИКА (8 класс)**  
**Заключительный этап**  
**Вариант 1**

1. Найдите все тройки действительных чисел  $(u; v; w)$ , удовлетворяющих системе

уравнений: 
$$\begin{cases} u + v \cdot w = 12, \\ v + w \cdot u = 12, \\ w + u \cdot v = 12. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(3; 3; 3)$ ,  $(-4; -4; -4)$ ,  $(1; 1; 11)$ ,  $(1; 11; 1)$ ,  $(11; 1; 1)$ .

**Решение:** Вычтем из второго уравнения первое

$$(v - u) - w(v - u) = 0,$$

$$(v - u)(1 - w) = 0.$$

$$1) v = u \Rightarrow \begin{cases} v + w \cdot v = 12, \\ w + v^2 = 12. \end{cases} \Rightarrow (w - v) - v(w - v) = 0 \Rightarrow (w - v)(1 - v) = 0$$

Откуда следует, что  $v = u = w$  или  $v = u = 1$ .

Если  $v = u = w$ , то  $v = u = w = 3$  или  $v = u = w = -4$ .

Если  $v = u = 1$ , то  $w = 11$ .

$$2) w = 1 \Rightarrow \begin{cases} v + u = 12, \\ u \cdot v = 11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 11, u = 1; \\ v = 1, u = 11. \end{cases}$$

2. Три целых числа записаны в ряд  $a, b, c$ . Под этими числами во второй строке записали числа  $a - b, b - c, c - a$ . Числа третьей строки и последующих строк образованы из чисел предыдущей строки по такому же закону. Возможно ли встретить число 2021 среди чисел строк ниже 13 строки?

**Ответ:** невозможно.

**Решение.**

Запишем несколько рядов согласно условию задачи:

$a$	$b$	$c$
$a - b$	$b - c$	$c - a$
$a - 2b + c$	$b - 2c + a$	$c - 2a + b$
$3(c - b)$	$3(a - c)$	$3(b - a)$
$3(c - b) - 3(a - c)$	$3(a - c) - 3(b - a)$	$3(b - a) - 3(c - b)$
...	...	...

Все числа следующих рядов кратны трем как разность чисел кратных трем.

Число 2021 не кратно трем, поэтому уже с третьего ряда не может встретиться в последовательности чисел.

3. Найдите  $g(2022)$ , если для любых действительных  $x, y$  выполняется равенство

$$g(x - y) = g(x) + g(y) - 2021(x + y).$$

**Ответ: 4086462.**

**Решение.** Подставим  $x = y = 0$ , получим

$$g(0) = g(0) + g(0) - 2021(0 + 0) \Rightarrow g(0) = 0.$$

Подставим  $x = y$ , получим

$$g(0) = g(x) + g(x) - 2021(x + x) \Rightarrow g(x) = 2021x \Rightarrow$$

$$g(2022) = 2021 \cdot 2022 = 4086462.$$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+m+mn} + \frac{1}{1+n+nk} + \frac{1}{1+k+km} \text{ при условии, что } m = \frac{1}{nk}.$$

**Ответ: 1.**

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+m+mn} + \frac{1}{1+n+nk} + \frac{1}{1+k+km} &= \frac{k}{k+km+kmn} + \frac{km}{km+kmn+kmnk} + \frac{1}{1+k+km} = \\ &= \frac{k}{k+km+1} + \frac{km}{km+1+k} + \frac{1}{1+k+km} = \frac{k+km+1}{1+k+km} = 1. \end{aligned}$$

5. В выпуклом многоугольнике  $MNKLP$  отрезок  $NL$  делит каждый из углов  $KNP$  и  $KLM$  пополам, а отрезок  $KP$  делит пополам каждый из углов  $MKL$  и  $NPL$ . Диагональ  $NP$  пересекает диагонали  $MK$  и  $ML$  в точках  $F$  и  $E$ . Верно ли, что  $KF = LE$ ?

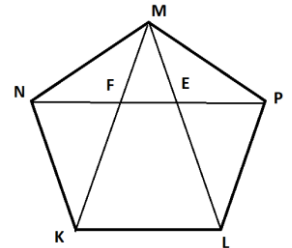
**Ответ: да, верно.**

**Решение.**

Треугольники  $FPK$  и  $LPK$  равны по стороне и прилежающим к ней углам ( $PK$  – общая). Следовательно,  $KF = LK$ . Аналогично,  $LE = LK$ .

Таким образом, получаем

$$\left. \begin{aligned} KF &= LK \\ LE &= LK \end{aligned} \right\} \Rightarrow KF = LE.$$



**Критерии оценивания приведены в таблице:**

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.

<b>0</b>	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
----------	--