

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Вычислите $2022! \cdot (S_{2021} - 1)$, если $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$.

Ответ: -1 .

Решение.

Учитывая, что $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, получим

$$S_{2021} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{2021}{2022!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2021!} - \frac{1}{2022!}\right) = 1 - \frac{1}{2022!}.$$

Тогда $2022! \cdot (S_{2021} - 1) = 2022! \cdot \left(1 - \frac{1}{2022!} - 1\right) = -1$.

2. Для каждого значения параметра k решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \cdot \sin 7x - \cos^2 7x = \cos^2 \left(\frac{\pi k}{2021}\right).$$

Ответ: При $k = 2021 \cdot m$, $m \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

при других значениях параметра k решений нет.

Решение.

Исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$(\sin 3x + \sin 7x)^2 + (\cos 3x + \cos x)^2 + \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin 3x + \sin 7x = 0, \\ \cos 3x + \cos x = 0, \\ \sin \left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 0. \end{cases}$$

Если $k = 2021 \cdot m$, $m \in Z$, то решая первое и второе уравнение системы, получим

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

При других значениях параметра k решений нет.

3. Пусть $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{2}{p(1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p(2)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p(3)}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{p(2021)}\right).$$

Ответ: $\frac{1012}{3033}$.

Решение.

Рассмотрим n -й множитель в данном произведении

$$1 - \frac{2}{p(n)} = \frac{p(n) - 2}{p(n)} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n(n + 3)}{(n + 1)(n + 2)}.$$

Вычислим

$$\left(1 - \frac{2}{p(1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p(2)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p(3)}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{p(2021)}\right) = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdots \frac{2021 \cdot 2024}{2022 \cdot 2023} = \frac{1 \cdot 2024}{3 \cdot 2022} = \frac{1012}{3033}.$$

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$, если относительно a, b, c известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям $a^3 - 2022a^2 + 1011 = 0$, $b^3 - 2022b^2 + 1011 = 0$, $c^3 - 2022c^2 + 1011 = 0$.

Ответ: -2 .

Решение.

Кубическое уравнение $t^3 - 2022t^2 + 1011 = 0$ имеет три различных корня (так как для $f(t) = t^3 - 2022t^2 + 1011$: $f(-3000) < 0, f(0) > 0, f(10) < 0, f(3000) > 0$).

Пусть эти корни и будут a, b, c . Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a + b + c = 2022, \\ ab + bc + ac = 0, \\ abc = -1011. \end{cases}$$

Найдем значение выражения: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{c+a+b}{abc} = \frac{2022}{-1011} = -2$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SMNKL$ лежит прямоугольник $MNKL$. Известны длины четырех ребер данной пирамиды $MN = 5, NK = 2, SM = 3, SN = 4$. Определите при каких значениях длин оставшихся двух ребер SK и SL объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислите этот объем.

Ответ: $V_{max} = 8, SK = 2\sqrt{5}, SL = \sqrt{13}$.

Решение.

Опустим из точки S перпендикуляры SP на ребро MN и SH на плоскость основания $MNKL$.

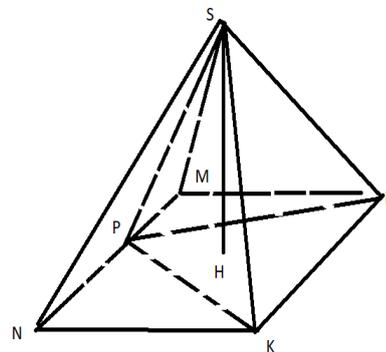
Все стороны треугольника SMN известны, поэтому длина SP определяется однозначно, основание пирамиды фиксировано, поэтому объем достигает наибольшего значения, если максимальна высота SH пирамиды.

Значит, SP и SH должны совпадать, и следовательно, грани SMN и $MNKL$ перпендикулярны.

Треугольник SMN прямоугольный, так как $SM = 3, SN = 4, MN = 5$.

После элементарных вычислений получаем $SP = \frac{12}{5}, MP = \frac{9}{5}, NP = \frac{16}{5}$.

Из прямоугольных треугольников NKP и SKP, MLP и SLP находим



$$SK^2 = SP^2 + NP^2 + NK^2 = 20, \quad SL^2 = SP^2 + MP^2 + ML^2 = 13 \Rightarrow SK = 2\sqrt{5}, SL = \sqrt{13}$$

$$V_{max} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNKL} \cdot SP = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{12}{5} = 8.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.