

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
225	20.03.25	Генеральный	Ж
Шифр			918206

1/2/3/4/5
7/1/7/7/0

Задача 1.

$x > y, x, y > 0$. Известно, что $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$,
значит, $x^2 + y^2 + 2xy = \frac{10}{3}xy + 2xy, (x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$,
а также, $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{10}{3}xy - 2xy, (x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$.
т.к. $x > y$ и x, y - положительные числа, то $x+y = \sqrt{\frac{16}{3}xy}, x-y = \sqrt{\frac{4}{3}xy}$.
 $\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{\frac{16}{3}xy}}{\sqrt{\frac{4}{3}xy}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$. Ответ: $\frac{x+y}{x-y} = 2$.

Задача 3

Преобразуем a_n . $1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} =$
 $= \frac{n^4 + 3n^3 - n^3 - 3n + n - 1}{n^4} = \frac{n^3(n-1) + 3n(n^2-1) + n-1}{n^4} =$
 $= \frac{n^3(n-1) + 3n(n-1)(n+1) + (n-1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n^4} =$
 $\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$. Разобьем a_n на две дроби: $\frac{n-1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n}$.

Рассмотрим $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ ($n \geq 2$):

$\left(\frac{n-1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+2)^3}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{(n+2)^3} \cdot \frac{(n+3)^3}{n+2}\right)$. левая дробь a_{n+1}
сокращается с правой дробью

С помощью индукции докажем, что $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n}$.База: $n=2, a_2 = \frac{(2-1)}{2^3} \cdot \frac{(2+1)^3}{2} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(2+1)^3}{2}$. Это такПредположение индукции: предположим, что $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_k = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(k+1)^3}{k}$.Докажем, что $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(k+2)^3}{k+1}$; подставим $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_k$ из предположения, раскроем a_{k+1} :

$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{(k+1)^3}{k} \cdot \left(\frac{k}{(k+1)^3} \cdot \frac{(k+2)^3}{k+1}\right) = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(k+2)^3}{k+1}$, доказано, продолжим стр. 2

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918396

Задача 3, продолжение.

значит, $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(99+1)^3}{99} = \frac{50^3}{99} = 1252 \frac{62}{99}$

Ответ: $\frac{50^3}{99}$ (или $1252 \frac{62}{99}$) ✓

Задача 4.

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, по т. Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$ ✓

Вспомогательная тема, что $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Тогда $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4ab(a^2 + b^2) - 4x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) - 6x_1^2x_2^2$;
 $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) - 6x_1^2x_2^2$. Подставим числа из системы:

$x_1^4 + x_2^4 = (-p)^4 - 4 \cdot (-\frac{1}{2p^2}) \cdot ((-p)^2 - 2(-\frac{1}{2p^2})) - 6(-\frac{1}{2p^2})^2 =$
 $= p^4 + 2 + \frac{2}{p^4} - \frac{3}{2p^4} = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2$. ✓

Среднее арифметическое $\geq$ среднему геометрическому: $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}}$

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq \frac{2}{\sqrt{2} + 2}$, т.т.т.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2.

Контрпример к тому, что требуют доказать:

Пусть $a = \frac{5}{3}$ ($a \geq 1$), $b = \frac{12}{5}$ ($b \geq 2$), $c = \frac{15}{4}$ ($c \geq 3$).

$$\text{Сумма квадратов: } a^2 + b^2 + c^2 = \frac{25}{9} + \frac{144}{25} + \frac{225}{16} =$$

$$= 2\frac{7}{9} + 5\frac{19}{25} + 14\frac{1}{16} \geq 21\sqrt{9}$$

$$\text{Но сумма } a+b+c = \frac{5^{20}}{3} + \frac{12^{12}}{5} + \frac{15^{15}}{4} = \frac{100 + 144 + 225}{60} =$$

$$= \dots \text{ унс, неверный контрпример.}$$

Т.к. $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, то нужно доказать, что
условие: $a+b < 4$; $b+c < 6$; $a+c < 5$, одновременно выполня-
ться не могут. Или доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}{a+b+c} \geq 3 + \frac{2(ab + bc + ac)}{a+b+c};$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}{a+b+c} \geq 3 + \frac{2(ab + bc + ac)}{a+b+c};$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c) + 2(ab+bc+ac)$$

10