Шифр 07808

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	19.03.	Кофрюкова Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
7	7	6	0	0	20

№1 $n^3+6n^2+5n=27m^3+9m^2+9m+1$.

Заметим, что $\underline{27}m^3+\underline{9}m^2+\underline{9}m+1 \underset{3}{\equiv} 1$ т.к. m – целое число.

$n^3+6n^2+5n=n^3+n^2+5n^2+5n=n^2(n+1)+5n(n+1)=$

$=(n^2+5n)(n+1)=n(n+5)(n+1)$.

Т.к. правая часть $\underset{3}{\equiv} 1$, то левая тоже.

$n(n+5)(n+1)\underset{3}{\equiv}1$.

если $n\underset{3}{\equiv}0$, то $n(n+5)(n+1)\,\vdots\,3$ (один из множителей $\vdots\,3$), значит $n\underset{3}{\not\equiv}0$.

если $n\underset{3}{\equiv}1$, то $n+\underline{5}\underset{3}{\equiv}6\underset{3}{\equiv}0$, тогда $n(n+5)(n+1)\underset{3}{\equiv}0$ т.к. один из множителей $\vdots\,3$, значит $n\underset{3}{\not\equiv}1$.

если $n\underset{3}{\equiv}2$, то $n+1\underset{3}{\equiv}2+1\underset{3}{\equiv}3\underset{3}{\equiv}0$, тогда $n(n+5)(n+1)\underset{3}{\equiv}0$, т.к. один из множителей $\vdots\,3$.

Ни один из возможных остатков тройки не подходит, Значит таких чисел n и m не существует. +

№2. $2x^2-2xy+5y^2-2x-2y+1=0$;

$2x^2-2xy+5y^2-2x-2y+1=\underline{x^2}+\underline{\underline{x^2}}-\underline{\underline{4xy}}+\underline{2xy}+\underline{y^2}+\underline{\underline{4y^2}}-$

$-2(x+y)+1=(x+y)^2-2(x+y)+1+(x-2y)^2=$

$=(x+y-1)^2+(x-2y)^2$; $(x+y-1)^2+(x-2y)^2=0$; т.к. квадрат ≥ 0, то если сумма квадратов равна нолю, то каждый квадрат равен нолю. (продолжение на стр. 2)

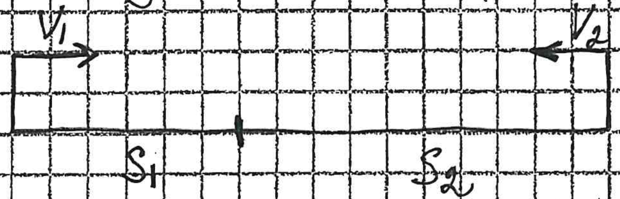
тогда имеем систему $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

вычтем из первого второе: $x+y-1-x+2y=0-0$;

$3y=1$; $y=\frac{1}{3}$. $x=2y$; $x=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $y=\frac{1}{3}$; $x=\frac{2}{3}$.

№3. Пусть V_1 – скорость первого авто, V_2 – скорость второго, S_1 – путь, который проехал первый автомобиль до встречи, а S_2 – путь, который проехал до встречи второй.



из условия можем составить два уравнения:

$$\begin{cases} 18+\frac{S_1}{V_1}=\frac{S_2}{V_1} \,\Big|\, V_1 \\ \frac{S_2}{V_2}=\frac{S_1}{V_2}+12 \,\Big|\, V_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 18V_1=S_2-S_1 \\ 12V_2=S_2-S_1 \end{cases}$$

т.к. правые части уравнений равны то левые тоже равны.

$18V_1=12V_2$, $3V_1=2V_2$; $V_1=\frac{2}{3}V_2$. Т.к. автомобили выехали одновременно то время до момента встречи первого равно времени до момента встречи второго:

$\frac{S_1}{V_1}=\frac{S_2}{V_2}$; заменим V_1 на $\frac{2}{3}V_2$, $\frac{S_1}{\frac{2}{3}V_2}=\frac{S_2}{V_2} \,\Big|\, V_2$, $1{,}5S_1=S_2$.

Из уравнения $18+\frac{S_1}{V_1}=\frac{S_2}{V_1}$, $\frac{S_1}{V_1}=\frac{S_2}{V_1}-18$; заменим S_2 на $1{,}5S_1$;

$\frac{S_1}{V_1}=\frac{1{,}5S_1}{V_1}-18$; $0{,}5\frac{S_1}{V_1}=18$; $\frac{S_1}{V_1}=36$ (мин).

Ответ: через 36 минут.

Место для скобы

Шифр 07808

№4: $\frac{b-a}{b(b+1)}+\frac{c-b}{c(c+1)}+\frac{a-c}{a(a+1)} \vee 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a+1} \vee \frac{a}{b(b+1)}+\frac{b}{c(c+1)}+\frac{c}{a(a+1)} \Longleftrightarrow$

$0 \vee \left(\frac{a}{b}-1\right)\frac{1}{b+1}+\left(\frac{b}{c}-1\right)\frac{1}{c+1}+\left(\frac{c}{a}-1\right)\frac{1}{a+1}$?

среднее арифм. $\geqslant$ сред. геом.