

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
23		Евсеев	Евсеев

Шифр

040207

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Sigma \\ \hline 7 & 2 & 7 & 7 & & 23 \end{array}$$

Задача 1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | + 2xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$x+y = \sqrt{\frac{16}{3}xy} = 4\sqrt{\frac{xy}{3}}$$

(мы так можем сделать, т.к. $x, y > 0$, следовательно $-\sqrt{\frac{16}{3}xy}$ не может быть)

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{4\sqrt{\frac{xy}{3}}}{2\sqrt{\frac{xy}{3}}} = 2$$

Ответ: 2

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | - 2xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$x-y = \sqrt{\frac{4}{3}xy} = 2\sqrt{\frac{xy}{3}}$$

(мы так можем сделать т.к. $x > y > 0$, следовательно $-\sqrt{\frac{4}{3}xy}$ не может быть)

Задача 3

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{n^4 + n^3 + n^3 - n - 1}{n^4} \\ &= \frac{n^3(n+1) - (n+1) + n(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n+1)(n^3-1) + n(n^2-1)}{n^4} \\ &= \frac{(n^2-1)(n^2+n+1) + n(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(n+1)^2}{n^4} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} \end{aligned}$$

Теперь запишем само выражение:

$$\frac{(2-1)(2+1)^3}{2^4} \cdot \frac{(3-1)(3+1)^3}{3^4} \cdot \frac{(4-1)(4+1)^3}{4^4} \cdots \frac{(99-1)(99+1)^3}{99^4}$$

Заметим циклическое сокращение и в конце концов

$$\text{мы получаем } \frac{1 \cdot (100)^3}{8 \cdot 99} = \frac{1000000}{99 \cdot 8} = \frac{125000}{99}$$

Ответ: $\frac{125000}{99}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			040167

№2

Представим, что это не так, следовательно $a+b+c < 7$.
сделаем систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \geq 21 & (1) \\ a+b+c < 7 & (2) \end{cases}$$

поделим (1) на (2) и у нас получится $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} > 3$

(т.к. мы делим большее число на меньшее, а в правой части
меньшее на большее, следовательно ничего не меняется,
кроме знака из „ $\geq$ “ на „ $>$ “)

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-2(ab+bc+ca)}{a+b+c} > 3$$

$$\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c} > 3 \quad | \cdot (a+b+c)$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &> 3+2 \cdot 3a+3b+3c+2(ab+bc+ca) \\ a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) &> 3a+3b+3c+2(ab+bc+ca) \\ a^2+b^2+c^2 &> 3a+3b+3c, \end{aligned}$$

но заметим, что $a+b+c < 7$, т.е. $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$,
но из этого уравнения очевидно? левая часть меньше,
т.к. с может вспомнить

в момент ~~во~~ вспомнить за счет c
а никак не вспомнить

т.т.г.

не доказано!

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$\sqrt{2}$ мы прибавим $2x_1^2x_2^2$ и уберем в итоге (1), т.е. ничего не изменилось

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$

$$= (p^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \Rightarrow$$

по теореме Виета
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (p^2 - 2x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_2)(p^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_1x_2) =$$

$$= (p^2 - x_1x_2(2 + \sqrt{2}))(p^2 - x_1x_2(2 - \sqrt{2})) =$$

$$= \left(p^2 + \frac{2 + \sqrt{2}}{2p^2}\right) \left(p^2 + \frac{2 - \sqrt{2}}{2p^2}\right) = p^4 + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{4 - 2}{4p^4} =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{2}{4p^4} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \text{ и это должно быть больше, чем } 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \quad | \cdot p^4$$

$$p^8 + \frac{1}{2} \geq \sqrt{2} p^4$$

$$p^8 - \sqrt{2} p^4 + \frac{1}{2} \geq 0$$

Введем замену $p^4 = x^2$

$$x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$\Delta = 4 - 2 = 2 \neq 0$ и "ветви" направлены $\Rightarrow$ неравенство верно.

т.ч. д