ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
17		Емельянова	Емел

Шифр [illegible]

1	2	3	4	5	Σ
1	7	4	0	5	17

Задание №1

$(7+a-b)^2+(2+b-c)^2+(9+c-a)^2$

Минимальное выражение положительного числа „0", тогда пусть

$9+c-a=0$

$c=a-9$, подставим $(7+a-b)^2+(2+b-a+9)^2=(7+a-b)^2+$
$+(11+b-a)^2$

предположим $11+b-a=0$

$b=a-11$, тогда $(7+a-a+11)^2=18^2$

Ответ: 324.

Задание №2

$P(x)=x^6+x^5-4x^4+x^2-x+506$

$Q(x)=x^4+x^3-4x^2+1$

$x^4+x^3-4x^2+1=0$ — это уравнение имеет корни $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$P(x)=x^2(x^4+x^3-4x+1)-x+506$

$P(x_1)=x_1^2\cdot Q(x_1)-x_1+506$, $Q(x_1)=0$, тогда

$P(x_1)=-x_1+506$, аналогично:

$P(x_2)=-x_2+506$

$P(x_3)=-x_3+506$

$P(x_4)=-x_4+506$

$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=-x_1-x_2-x_3-x_4+506\cdot 4=$
$=-(x_1+x_2+x_3+x_4)+2024$

$x_1+x_2+x_3+x_4=-1$ по теореме Виета

тогда $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=2025$

Задание №3

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0$$

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}$$

Рассмотрим левую часть уравнения

$f(x)=x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\sqrt{x^2+1}^2-6\sqrt{x^2+1}+10$

Введем замену $\sqrt{x^2+1}=t>0$

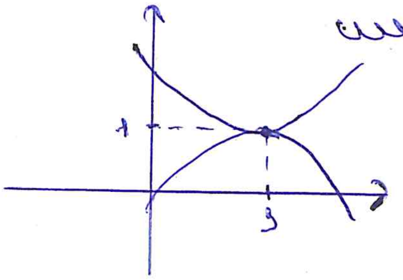
$f(t)=t^2-6t+10$

Найдем наименьшее значение $f(t)$ — это вершина парабола.

$t_в = 3$ $\quad f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$.

Значит $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$ — наименьшее значение равно 1.

Правая часть $-1 \le \cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18} \le 1$, т-е наибольшее значение это 1, тогда если уравнение имеет решение, то правая и левая часть должна равняться единице



$\sqrt{x^2+1} = 3$

$x^2 + 1 = 9$

$x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$

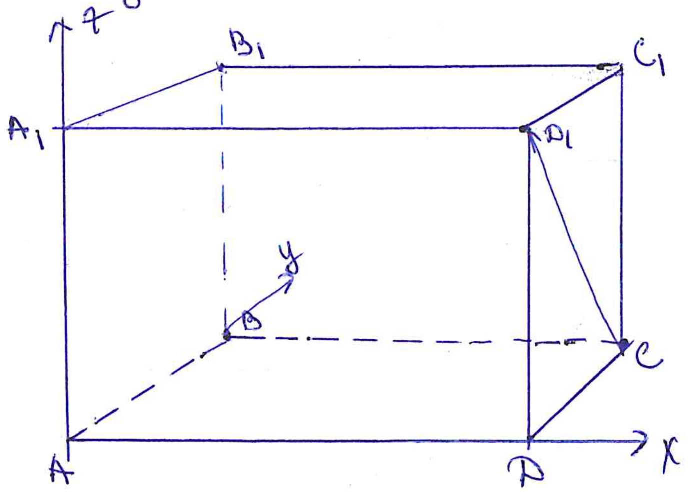
$\cos\frac{2+2-4}{18} = \cos 0 = 1$

$x = -\sqrt{2}$

$\cos\frac{2-2-4}{18} \ne 1$ Ответ: $x = \sqrt{2}$ —

Проверка? Ответ неверный

Задание №5



Пусть $\vec{n} \perp \alpha$, $\vec{n}_2 \perp \beta \iff$

$\cos(\widehat{\alpha,\beta}) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$

В качестве $\vec{n}$, можно принять $\overrightarrow{A_1C_1} = \overline{AC} = (1;1;0)$

Пусть $\vec{n}_2$ им. коорд (p, q, r).

Т.к $CD_1 \parallel \beta$, то $\vec{n}_2 \perp \overline{CD_1}$

$\overline{CD_1} = D_1 - C = (1,0,1) - (1,1,0) = (0;-1;1)$

$\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{CD_1} \Rightarrow \vec{n}_2 \cdot \overline{CD_1} = 0 \Rightarrow -q + r = 0$, $r = q$

$\vec n_2$ имеет вид $(p;q;q)$

Пусть $(\widehat{\vec n_1;\vec n_2}) = \varphi$

$$\cos\varphi = \frac{\vec n_1 \vec n_2}{|\vec n_1||\vec n_2|} = \frac{p+q}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2q^2}}$$

? Б.О.О можно считать, что $q = 1$

Требуется найти $\min|\cos\varphi| = \min \frac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a > 0$

Т.е требуется найти наименьшее a, $a>0$ при почему?! которых ур-ие $\frac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a$ имеет решение p

обоснование недостаточно

$$(p+1)^2 = 2a^2(p^2+2)$$

$$2a^2p^2 + 4a^2 = p^2 + 2p + 1$$

$$p^2(2a^2-1) - 2p + 4a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (2a^2-1)(4a^2-1)$$

$$8a^4 - 6a^2 + 1 - 1 = 0$$

$$2a^2(4a^2-3) \geq 0$$

$+ \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad - \quad 0 \quad - \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad +$

$a > 0$!

$$\min|\cos\varphi| = a_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_б = \frac{\pi}{6}$$

Задание №4

$x_1; x_2; \ldots, x_n \geq 0$ — дано, что они положительные

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n$$

доказать $(x_1 - n+1)(x_2 - n+1)\ldots(x_n - n+1) \geq 1$

$n < 3$ т.к. если $n = 3$ и более $x_1^2 + x_2^2 > x_1 \cdot x_2$ сумма чисел в степени больше их произведения

n — целое число т.к. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} < x_1 \cdot x_2$?

$n > 1$ т.к. если $n = 1$, то $x^{n-1} = 1$ $\quad n \neq x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$

$n < 1$, то $x^{n-1} = \frac{1}{x^n} \Rightarrow \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} + \ldots \frac{1}{x_n^n} \neq x_1 x_2 \ldots x_n$