Место для скобы

Шифр 09223

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
13б	23.03.24	[illegible]	[illegible]

1	2	3	4	5
0	5	7	1	0

5б

2. $x^2+kx+k=0$

$x^2+k(x+1)=0$

$x^2=-k(x+1)$

x^2 всегда ≥ 0

$\Rightarrow -k(x+1)$ должно быть ≥ 0, тогда [redacted] $x+1\leq 0$
$x\leq 1$

$D=k^2-4k \Rightarrow$

$x=\dfrac{\sqrt{k^2-4k}\pm k}{2}$ если x – целое, то должно выполнятся несколько условий:

① $k^2-4k\geq 0$ т.к. корень извлекается из неотрицат. чисел

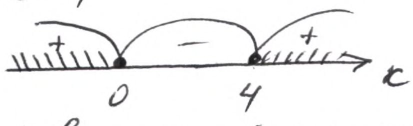
② $\sqrt{k^2-4k}\pm k$ – четное число

$\downarrow$

$k^2-4k\geq 0$
найдем нули:

$k^2-4k=0$
$k(k-4)=0$

$\left[\begin{array}{l}k=0\\k=4\end{array}\right.$



Ответ: $k\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$

из решения неравенства есть две готовые целые точки: 0 и 4, которые соответствуют условиям

т.к. нам нужны только целые значения k и x, то (k^2-4k) должен быть полным квадратом

$k^2-4k=k(k-4)\rightarrow$ является квадратом при $k=0$ и $k=4$ (уже найдены)

$\sqrt{k(k-4)}$ – должно быть целое число

09223

$\sqrt{k(k-4)} = \sqrt{k}\cdot\sqrt{k-4}$ => k и $k-4$ являются полными квадратами, но у чисел >4 нет квадратов, отличающихся на 4 =>

подходят только числа 0 и 4.

Ответ: 0, 4.

3. Пусть первый брусок сплава весит x кг, второй y кг, а брусок серебра c кг. Пусть кол-во золота в первом бруске — x_1, во втором y_2, в третьем соответственно c. Тогда,

[redacted]

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+y_1}{x+y} = \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{y_1}{y+c} = \dfrac{x_1}{x+c} = \dfrac{2}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 10y_1 = 3x+3y \\ 10x_1 = 2(x+c) \\ 10y_1 = 2(y+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(x+c)+2(y+c) = 3x+3y \\ 2x+2c+2y+2c = 3x+3y \\ 4c = x+y \end{array}$$

7б

$$\frac{x_1+y_1}{4c} = \frac{3}{10}$$

$$x_1+y_1 = \frac{1{,}2c}{10} = 1{,}2c$$

По условию задачи нужно найти [redacted]

$$\frac{x_1+y_1}{x+y+c} = \frac{1{,}2c}{4c+c} = \frac{1{,}2c}{5c} = \frac{1{,}2}{5} = 0{,}24$$

=> в сплаве будет содержаться 24% золота

Ответ: 24%.

1. $3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} = 9^{31} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} = 2^{31}\cdot 4{,}5^{31} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} =$

$=$ [redacted] $2^{18}(2^{13}\cdot 4{,}5^{31} - 1{,}5^{31}\cdot 2^{31} + 2^{18})$

0б

Выражение можно представить в виде произведения [redacted] $2^{18}(2^{13}\cdot 4{,}5^{31} - 1{,}5^{31}\cdot 2^{31} + 2^{18})$, значит, это число делится на 2^{18}, а значит, оно не простое.

4. $$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \le \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+1}{b+1} - \frac{b+1}{c+1} - \frac{c+1}{a+1} \ge 0$$

Место для скобы

Шифр 09223

$$\frac{a(b+1)-(a+1)b}{b(b+1)}+\frac{b(c+1)-(b+1)c}{(c+1)c}+\frac{c(a+1)-a(c+1)}{(a+1)a}\geq 0$$

Знаменатели всех слагаемых первой части неравенства положительные по условию

Предположим, что $a>b>c$ (разницы в возрастании переменных нет), тогда

первая дробь положительна, ведь

$a(b+1)-(a+1)b=ab+a-ab-b=a-b>0$ и

вторая дробь положительна, ведь

$b(c+1)-(b+1)c=bc+b-bc-c=b-c>0$, но

третья дробь отрицательна $\Rightarrow$ надо доказать, что сумма двух первых дробей $\geq$ третьей.

$a(b+1)-(a+1)b+b(c+1)-(b+1)c>c(a+1)-a(c+1)$

что

1б