Шифр 08222

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
13б	22.03.24	Гендрина	

1	2	3	4	5
0	5	7	1	0

№1

$3^{62}+3^{31}\cdot 2^{18}+2^{36} = 3^{62}-2\cdot 3^{31}\cdot 2^{18}+2^{36} + 3\cdot 3^{31}\cdot 2^{18} =$

$= (3^{31}-2^{18})^2 - 3^{31}\cdot 2^{18}$

№2

$x^2+kx+k=0$

$D = k^2-4k$

$x_1 = \dfrac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$

$x_2 = \dfrac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}$

5б

Для того, чтобы были целые корни:

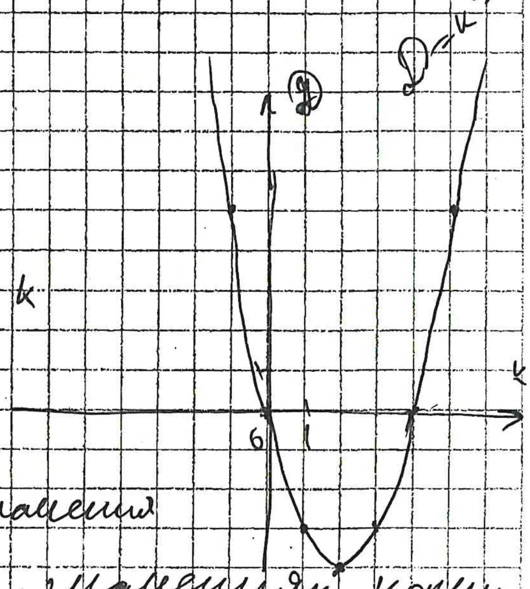
$k^2-4k \geq 0$ ~~$\Rightarrow k=4;\ k=0$~~

$k^2-4k=0$

$k(k-4)=0$

$k=0;\ k=4$

$f(k)=k^2-4k$



$k \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

Так как D имеет целые значения при 0 и 4, и при этих значениях корни тоже целые, что $k=4$ и $k=0$. Ответ: 4; 0

скобы

Шифр 08222

№3

Пусть x_1 - содержание серебра в сплавах, y - золота. Тогда:

73

1)

$$\begin{array}{c|c} \% & \frac{y_1}{x_1+y_1} \\ x & x_1 \\ y & y_1 \\ об. & x_1+y_1 \end{array} + \begin{array}{c} \frac{y_2}{x_2+y_2} \\ x_2 \\ y_2 \\ x_2+y_2 \end{array} = \begin{array}{c} \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2+y_1+y_2} = 0,3 \\ x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{c|c} \% & \frac{y_1}{x_1+y_1} \\ x & x_1 \\ y & y_1 \\ об. & x_1+y_1 \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{array} = \begin{array}{c} \frac{y_1}{x_1+y_1+x_3} = 0,2 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_1+y_1+x_3 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{c|c} \% & \frac{y_2}{x_2+y_2} \\ x & x_2 \\ y & y_2 \\ об. & x_2+y_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{array} = \begin{array}{c} \frac{y_2}{x_3+y_2+x_2} = 0,2 \\ x_3+x_2 \\ y_1 \\ x_3+x_2+y_1 \end{array}$$

$$\frac{y_1}{x_1+y_1+x_3} = \frac{y_2}{x_2+y_2+x_3}$$ - данное равенство возможно только в случае, если процентное содержание золота в двух сплавах равное

$$\Rightarrow \frac{y_1}{x_1+y_1} = \frac{y_2}{x_2+y_2} \Rightarrow \frac{y_1 + y_1}{x_1+y_1+x_1+y_1} = 0,3 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1+y_1} = 0,3$$

$$y_1 = 0,3(x_1+y_1) \qquad \frac{0,3(x_1+y_1)}{x_1+y_1+x_3} = 0,2 \qquad 0,3x_1+0,3y_1 = 0,2x_1+0,2y_1+0,2x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1(x_1+y_1) = 0,2x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}(x_1+y_1)$$

Место для скобы

Шифр 08222

$$\frac{y_1+y_1}{2x_1+2y_1+\frac{x_1+y_1}{2}} = \frac{2y_1\cancel{4}}{\frac{5x_1+5y_1}{2}} = \frac{4y_1}{5x_1+5y_1}$$

$$\frac{4y_1}{5(x_1+y_1)} = \cancel{4} \quad a$$

$$\frac{y_1}{x_1+y_1} = 0,3$$

$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{4}^{2} y_1}{5\,\cancel{2}(x_1+y_1)} \cdot \frac{\cancel{3}^{3}}{\cancel{10}\,5} \cdot \frac{x_1+y_1}{y_1} = \frac{4}{\cancel{6}}$$

$= \cancel{0,4}$ ~~содержание золо-~~ ~~та~~ $\frac{6}{25} = 0,24$ — содержание золота в 3 случае.

$a \quad 1,2y_1 \quad \cancel{4}$

Ответ: 24 %

№4

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} < \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\cancel{\frac{a+1}{b+1}}$$

Другое задание

~~№5~~ №1

$$3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} = \left(3^{31} - 2^{18}\right)^2 + 3^{31}\cdot 2^{18} = \left(3^{31} - 4^{9}\right)^2 + $$
$$+ 3^{31}\cdot 4^{9}$$

Рассмотрим 3^{31}: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ $\Rightarrow$ 3^{31} оканчивается на 7

Рассмотрим 4^9: $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$ $\Rightarrow$ 4^9 оканчивается на 4

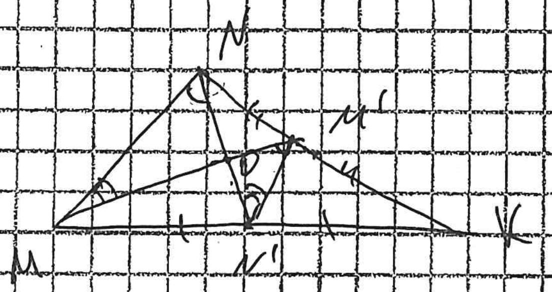
$7-4=3 \Rightarrow (3^{31}-4^{9})^2$ делится на 3

Так как $3^{31}-4^{9}$ делится на 3 и $3^{31}\cdot 4^{9}$ тоже делится на три (один из множителей $=3$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(3^{31}-4^{9})^2+4\cdot 3^{31}\cdot 4^{9}$ делится на три $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у числа $3^{62}-3^{31}\cdot 2^{18}+2^{36}$ точно есть делители $1;\ 3;\ 3^{62}-3^{31}\cdot 2^{18}+2^{36}$ $\Rightarrow$ оно составное.

№5



Дано: $\triangle MNK$;

$M' \in NK$; $NM' = M'K$;

$N' \in MK$; $MN' = N'K$;

$\angle MON \leq 90^\circ$

Доказать: $MK + NK > 3MN$

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle MON$ и $\triangle N'OM'$:

$\angle MON = \angle N'OM'$ (вертикальные); по свой-ву медиан: ~~MO~~ $NO : ON' = 2:1$ и $MO : OM' = 2:1$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{MO}{M'O} = \frac{NO}{N'O} = 2 \Rightarrow \\ &\angle MON = \angle N'OM' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle MON \sim \triangle N'OM'$$

10

скобы

Шифр

№ 4

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \le \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Пусть $c \le b \le a$

Рассмотрим попарно члены каждой суммы:

$\frac{a+1}{b+1}$ и $\frac{a}{b}$. Допустим $\frac{a+1}{b+1} \le \frac{a}{b}$

$ab+b \le ab+a \Rightarrow b \le a$, т.к. $c \le b \le a$ выражение $\frac{a+1}{b+1} \le \frac{a}{b}$ справедливо

1б

$\frac{b+1}{c+1} \le \frac{b}{c}$; $bc+c \le bc+b$; $c \le b$, т.к. $c \le b \le a \Rightarrow \frac{b+1}{c+1} \le \frac{b}{c}$ справедливо.

$\frac{c+1}{a+1} \le \frac{c}{a}$; $ac+a \le ac+c$; $a \le c$, т.к. $c \le b \le a$

$\Rightarrow \frac{c+1}{a+1} \le \frac{c}{a}$ не справедливо $\Rightarrow \frac{c+1}{a+1} > \frac{c}{a}$

Если $a=b=c$, то $1+1+1 \le 1+1+1$