

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
33	14.03	Хмылева	

Шифр

02003

$$\begin{array}{r} 1/2/3/4/5/ \\ \hline 7/5/7/7/7/ \\ \hline \Sigma \\ 335 \end{array}$$

Задача №4

Решение:

x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$. Следовательно по теореме Виета для $Q(x)$ ~~$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$~~ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \cdot 1 = -1$

$$Q(x_1) = x_1^4 + x_1^3 - 4x_1^2 + 1 = 0; \quad -4x_1^2 + 1 = -x_1^3(x_1 + 1)$$

$$\begin{aligned} P(x_1) &= x_1^6 + x_1^5 - 4x_1^4 + x_1^2 - x_1 + 50 = x_1^5(x_1 + 1) + x_1^2(-4x_1^2 + 1) - x_1 + 50 = \\ &= x_1^5(x_1 + 1) - x_1^2 \cdot x_1^3(x_1 + 1) - x_1 + 50 = 50 - x_1 \end{aligned}$$

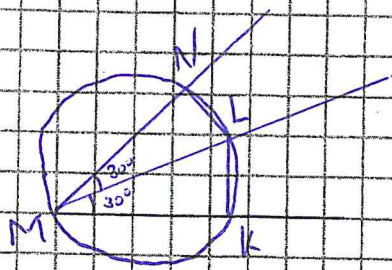
Аналогично для других корней многочлена $Q(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) &= 50 - x_1 + 50 - x_2 + 50 - x_3 + 50 - x_4 = \\ &= 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 200 + 1 = 201 \end{aligned}$$

Ответ: 201

78

Задача №5



Дано: $MNLK$ — вписанный; ML — биссектриса;

$$S_{MNLK} = 81, \quad \angle LMN = 30^\circ$$

Найти: $MN + MK$

Решение:

$$\begin{aligned} S_{MNLK} &= S_{MNL} + S_{MKL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot ML \cdot \sin \angle NML + \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MK \cdot \sin \angle LMK = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ML \cdot \sin 30^\circ \cdot (MN + MK); \quad MN + MK = \frac{S_{MNLK}}{\frac{1}{2} \cdot ML \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4 \cdot 81}{ML} = \frac{324}{ML} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме синусов для } \triangle MNL \text{ и } \triangle MKL \quad \frac{NL}{\sin 30^\circ} &= 2R; \quad \frac{LK}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \\ \Rightarrow NL = LK &= 2R \cdot \sin 30^\circ = R, \text{ где } R - \text{радиус окружности.} \end{aligned}$$

Продолжение на стр. 2

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Тогда по теореме косинусов для $\triangle MNL$ и $\triangle MLK$:

$$R^2 = MN^2 + ML^2 - 2MN \cdot ML \cdot \cos 30^\circ$$

$$R^2 = MK^2 + ML^2 - 2MK \cdot ML \cdot \cos 30^\circ$$

$$MK^2 + ML^2 - 2MK \cdot ML \cdot \cos 30^\circ = MN^2 + ML^2 - 2MN \cdot ML \cdot \cos 30^\circ$$

$$MK^2 - MN^2 = 2MK \cdot ML \cdot \cos 30^\circ - 2MN \cdot ML \cdot \cos 30^\circ$$

$$(MK - MN)(MK + MN) = 2ML \cdot \cos 30^\circ (MK - MN)$$

Если $MK - MN \neq 0$, то $MK + MN = 2ML \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}ML$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot ML = \frac{324}{ML} \quad ; \quad ML^2 = \frac{324}{\sqrt{3}} = 108\sqrt{3} \quad ; \quad ML = 6\sqrt{3\sqrt{3}}$$

$$MK + MN = \sqrt{3} \cdot ML = \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3\sqrt{3}} = 18\sqrt{3}$$

Если $MK - MN = 0$, то $MK = MN \Rightarrow \triangle MNK$ - равнобедренный $\Rightarrow$ центр окружности лежит на ML и $ML = 2R \Rightarrow \angle MNL = \angle MKL = 90^\circ$, т.к.

опираются на диаметр. По теореме Пифагора в $\triangle MKL$:

$$MK^2 + ML^2 = KL^2 \quad ; \quad MK^2 = KL^2 - ML^2 \quad ; \quad MK = \sqrt{(ML - KL)(ML + KL)} = \sqrt{R \cdot 3R} = R\sqrt{3} \Rightarrow MN + MK = 2MK = 2R\sqrt{3}$$

Тогда $2R\sqrt{3} = MN + MK = \frac{324}{ML} = \frac{324}{2R} \quad ; \quad 2^2 \cdot \frac{324}{45} = \frac{81}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$

$$R = \sqrt{495} = 3\sqrt{55} \quad ; \quad \sqrt{27\sqrt{3}} = 3\sqrt{3\sqrt{3}}$$

$$MN + MK = 2R\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 3\sqrt{3\sqrt{3}} = 18\sqrt{3}$$

Ответ: ~~при $MK \neq MN$ $18\sqrt{3}$~~ , ~~при $MK = MN$ 70~~

$$18\sqrt{3}$$



$$70$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача №2

Решение:

Рассмотрим параболу $f(x) = x^2 + ax + b$ где $a, b \in \mathbb{Z}$ $f(x)$ — это парабола $y = f(x)$ с вершиной $(x_0 = -\frac{a}{2}; y_0 = \frac{a^2 - 4b}{-4} = b - \frac{a^2}{4})$ ✓

Пусть a — нечётное число. Тогда расстояние от вершины параболы до оси OY равняется $x_0 = 0,5$, где x — некоторое нечётное неопределённое целое число.

y_0 будет иметь вид $Y - 0,25$, где Y — целое число

Разница между координатой пересечения параболы оси OY и координатой y_0 будет y координату пересечения параболы с осью OY .

при $y_0 < 0$ будет $(x+0,5)^2 - (y-0,25) = x^2 + x + 0,25 - y + 0,25 = x^2 + x - y + 0,5$ — нецелое число, а это координата по условию целая (равна $b \in \mathbb{Z}$)

при $y_0 = 0$ $f(x) \geq \frac{1}{4}$, при $x \in \mathbb{R}$

$$y_0 = Y - \frac{1}{4}$$

При $Y > 0$ $y_0 > 0$, то есть $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, при $x \in \mathbb{R}$

При $Y \leq -1$ $y_0 < -1$, не выполняется условие $f(x) \geq -\frac{9}{10}$, при $x \in \mathbb{R}$

При $Y = 0$ $y_0 = -0,25$, $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, при $x \in \mathbb{R}$ выполняется ✓

Если a — чётное число, то $y_0 = b - \frac{a^2}{4}$ — целое число. Следовательно ✓

при $y_0 \leq -1$ не выполняется условие $f(x) \geq -\frac{9}{10}$, при $x \in \mathbb{R}$, при $y_0 > -1$ условие $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, при $x \in \mathbb{R}$ выполняется. Следовательно $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, при $x \in \mathbb{R}$

Условию выполняется, если $f(x) \geq -\frac{9}{10}$ ~~при $x \in \mathbb{R}$~~

50 ч.м.г.

$$b - \frac{a^2}{4} < -\frac{1}{4}?$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задание №1

Решение

Пусть $a-b=x$, $b-c=y$, тогда $c-a=-x-y=-(x+y)$

$$(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 = (10+x)^2 + (2+y)^2 + (3-(x+y))^2 =$$

$$= 100 + 20x + x^2 + 4 + 4y + y^2 + 9 - 6x - 6y + x^2 + 2xy + y^2 = 113 + 2x^2 + 2y^2 + 14x - 2y + 2xy$$

Чтобы полученное выражение было минимальным, $2x^2 + 2y^2 + 14x - 2y + 2xy$ должно быть минимальным. Пусть в данном выражении x — переменная, а y — параметр.

Поскольку перед x^2 стоит 2, то выражение является параболой ветви вверх с минимальным значением в вершине $y_0 = \frac{-(14+2y)}{4} = \frac{-14-2y}{4}$

$$2x^2 + 2y^2 + 14x - 2y + 2xy = 2x^2 + x(14+2y) + 2y^2 - 2y$$

$$y_0 = \frac{-(14+2y)^2 + 4(2y^2 - 2y)}{8} = \frac{-14^2 - 56y - 4y^2 + 8y^2 - 16y}{8} = \frac{4y^2 - 72y - 196}{8}$$

$$\text{Вершина} = \frac{3y^2}{2} - 9y - \frac{7^2}{2}$$

$$\text{Данный многочлен также принимает минимальное значение в вершине: } y_0 = \frac{-81 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7^2}{2}}{6} = \frac{-81 - 3 \cdot 49}{6} = \frac{-27 - 49}{2} =$$

$$= -\frac{76}{2} = -38 \quad \text{Следовательно минимальное значение } (10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 = 113 - 38 = 75$$

Это значение достигается при $a=0$, $b=5$, $c=2$

$$(10+0-5)^2 + (2+5-2)^2 + (3+2-0)^2 = 3 \cdot (5)^2 = 75$$

Ответ: 75

75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задание №3

Решение:

$a_1 = 25, a_2, a_3, \dots, a_{2025} = 625$ - арифметическая прогрессия, знаменатель прогрессии $d = \frac{625 - 25}{2024} = \frac{600}{2024}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots \\
 & + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{a_{2024} - a_{2025}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \\
 & = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d} = \\
 & = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{\frac{600}{2024}} = \frac{(25 - 5) \cdot 2024}{600} = \frac{20 \cdot 2024}{600} = \frac{2024}{30} = \frac{1012}{15}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1012}{15}$

✓ 70