

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
225 (9 баллов за 1 задание)	13.03.25	Лугинский И.И.	<i>[Подпись]</i>
Шифр			025-2-M-47

1. $(10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2$

Найти: минимальное значение

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a - b = 0 \\ + \\ 2 + b - c = 0 \\ + \\ 3 + c - a = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = b - 10 \\ c = 2 + b \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 + a - b + b - c = 0 \\ 12 + b - 10 + 2 + b = \end{array}$$

$15 = 0$ (не может быть) $\Rightarrow$

должно быть: $15 = 15 \Rightarrow$

$10 + a - b + 2 + b - c + 3 + c - a \neq 0 \Rightarrow$

$10 + a - b + 2 + b - c + 3 + c - a = 15 \Rightarrow$

заменим

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a - b = x \\ 2 + b - c = y \\ 3 + c - a = z \end{array} \right\} \text{распределим } 15 \Rightarrow x = 5; y = 5; z = 5 \Rightarrow$$

15 частный случай

$5^2 + 5^2 + 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$

2. Рассмотрим квадратичную функцию

$f(x) = x^2 + ax + b$

Для которого выполняется неравенство

$f(x) \geq -\frac{9}{10}$ для всех $x \in \mathbb{R}$

Старший коэффициент коэф. положительный

$1 > 0$

минимальное значение функции в вершине параболы

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-M-47

$$x_{\text{верш}} = -\frac{a}{2}$$

подставим

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b$$

так как по условию $f(x) \geq -\frac{9}{10}$ то выполняется.

$$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10}$$

a и b — целые числа, то b должно быть целым $\Rightarrow -\frac{a^2}{4} + b$ принимает рациональное значение, левая часть неравенства должна быть не меньше $-\frac{9}{10}$ то

$$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10}$$

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$$

преобразуем

$$b \geq \left\lceil \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \right\rceil$$

Рассмотрим наибольшее возможное приближенное к целому числу удовлетворяющее условию. Оказывается что минимальное возможное значение b удовлетворяет

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \Rightarrow b \geq \frac{a^2}{4} - 1$$

Поскольку b — целое число, то наименьшее возможное b можно проверить перебором допустимых значений вывод: $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ для всех x

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-M-47

3. Дано: $a_1 = 25$; $a_{2025} = 625$

Решение:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$625 = 25 + (2025-1) \cdot d$$

$$2024d = 600$$

$$d = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$$

так как $a_{k+1} - a_k = d$ то:

$$\frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}$$

Суммируя по всем k от 1 до 2024 получаем telescoping ряд:

$$\frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d}$$

подставим

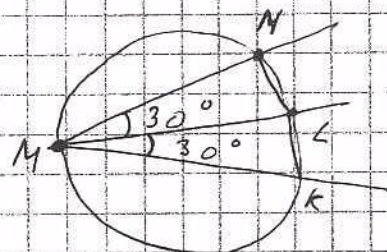
$$\frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{\frac{75}{253}} = \frac{25 - 5}{\frac{75}{253}} = \frac{20}{\frac{75}{253}} = \frac{20 \cdot 253}{75} = \frac{5060}{75} = \frac{1012}{15}$$

5. Дано: через вершину M проведена окружность

пересек в точках N и K

$$\angle NML = 30^\circ = \angle KML$$

$$S_{MNK} = 81$$



Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-M-47

Найти: $MN + MK = ?$

Решение:

Так как:

$$\angle NML = \angle KML = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\text{катеты окр-ми } NL = KL \Rightarrow$$

$$\text{сторона } NL = KL \Rightarrow$$

$$\triangle NML = \triangle MLK$$

$$\angle NLK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ (по св-ву четырехугольника)} \Rightarrow$$

$$\angle NLM = \angle KLM = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$\triangle MLK$:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MK \cdot \sin 30^\circ$$

$\triangle MLN$:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MN \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{S}{2} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MK \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MN \cdot \sin 30^\circ \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2S = ML \cdot \sin 30^\circ (MK + MN)$$

$$2S = ML \cdot \frac{1}{2} (MK + MN)$$

$$\frac{4.81}{ML} = MK + MN$$

$$KL = \frac{\alpha}{2} \text{ (он лежит напротив угла } 30^\circ \text{ по св-ву он равен половине } \alpha)$$

$$ML = \alpha \Rightarrow$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-M-47

$$MK = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2}$$

Δ MKL:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 90^\circ$$

$$4S = \alpha^2 \sqrt{3} \quad ; \quad \sin 90^\circ = 1$$

$$\sqrt{\frac{4 \cdot 81}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\alpha^2}$$

$$\frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = \alpha$$

~~324~~

$$\frac{4S}{ML} = MK + MN$$

$$\frac{4 \cdot 81}{2 \cdot 9 \sqrt{3}} = MK + MN$$

$$4 \cdot 81 : \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = MK + MN$$

$$\frac{2 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 9} = MK + MN$$

$$MK + MN = 18\sqrt{3}$$

4.

OK