

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
12		Короснев	М
Шифр			042003

№ 1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | : y^2$$

$$x > y$$

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{10}{3} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} = a$$

$$a^2 + 1 = \frac{10}{3}a$$

$$a^2 - \frac{10}{3}a + 1 = 0$$

$$\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{100}{9} - 4 = 11\frac{1}{9} - 4 = 7\frac{1}{9} = \frac{64}{9}$$

$$a_1 = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{\frac{18}{3}}{2} = \frac{18}{6}$$

Предположим $a = \frac{x}{y}$:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \text{ - н.к., т.к. } x > y \text{ (по условию)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{18}{6}; \quad x = 18; \quad y = 6$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{18+6}{18-6} = \frac{24}{12} = 2$$

Ответ: 2

X

№ 2

$$a \geq 1; \quad b \geq 2; \quad c \geq 3 \text{ так, что } a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$D\text{-тв: } a+b+c \geq 7$$

Если $a=1; b=2; c=3$ (возьмем минимальные значения)

$$1+2^2+3^2=16$$

$16 < 21$ - не подходит.

Если $a=2; b=3; c=4$ (возьмем значения на единицу больше).

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$$

$29 \geq 81$ - подходит, но является не наименьшим вариантом.

Если $a=1; b=2; c=4$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

$21 \geq 81$ - подходит и является наименьшим вариантом.

Подставим в $a+b+c \geq 7$:

$$1 + 2 + 4 = 7$$

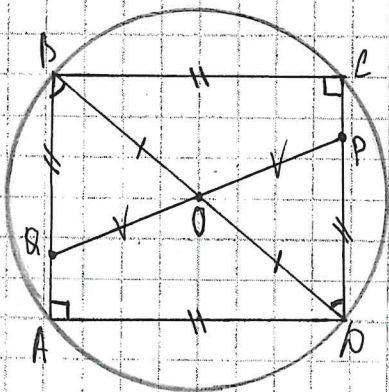
$7 \geq 7$, неравенство выполняется,

$\nexists a, b, c$

$\nexists$

з.м.г.

№5



Дано: ABCD - четырехугольник,

$$AP = AQ; BQ = PC$$

Верно ли, что $PO = OQ$

Решение:

1. $\angle B + \angle D = 180^\circ; \angle A + \angle C = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов, вписанного 4-х уг.-ка)

2. т. О - сер. окр.; $BO = OD = r$, значит ABCD - прямоугольник, т.к. диагонали делятся

т. пересечение пополам $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

3. из п.2 $\Rightarrow BC \parallel AD, AB \parallel CD$, значит $\angle QBO = \angle PDO$ - ННУ

4. $\triangle QBO \cong \triangle PDO$ (по п.2; $BO = DO; \angle QBO = \angle PDO$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OQ = OP$ (из равных сторон),

з.м.г.

№4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \quad \text{из Т. Виета}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

? *Анализ?*

$$f(p) = p^4 + \frac{1}{2p^4}$$

Приведем производную к нулю: $f'(p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \Rightarrow 4p^3 = \frac{2}{p^5}$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

т. мин?

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} + 2$$

z.m.g.

X