

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	20.03.24	Хмилёва Т.Е	<i>Т.Е. Хмилёва</i>

Задача 2

1	2	3	4	5	Σ
7	7	-	5	9	28

т.к. по условию $y^2 - x^2 > y - x$, то $y \neq x$,
 потому что если $x = y$, то $y^2 - x^2 = y - x$, что
 противоречит. ✓

Сравним $y^3 - x^3$ и $y^2 - x^2$
 $(y-x)(y^2 + xy + x^2)$ и $(y-x)(y+x)$

Сократим на $(y-x) \neq 0$ (т.к. $y \neq x$)

$y^2 + xy + x^2$ и $y + x$

по условию $y^2 + x^2 > y - x$

$$y^2 - y = x^2 - x$$

$f(t) = t^2 - t$. Рассмотрим ее монотонность

$$f'(t) = 2t - 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)$$



на промежутке

от 0 до $\frac{1}{2}$ она убывает, тогда, т.к.

$0 < y < \frac{1}{2}$ и $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > y$. ✓

Рассмотрим $f(t) = t^3 - t$ и ее монотонность

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 3\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

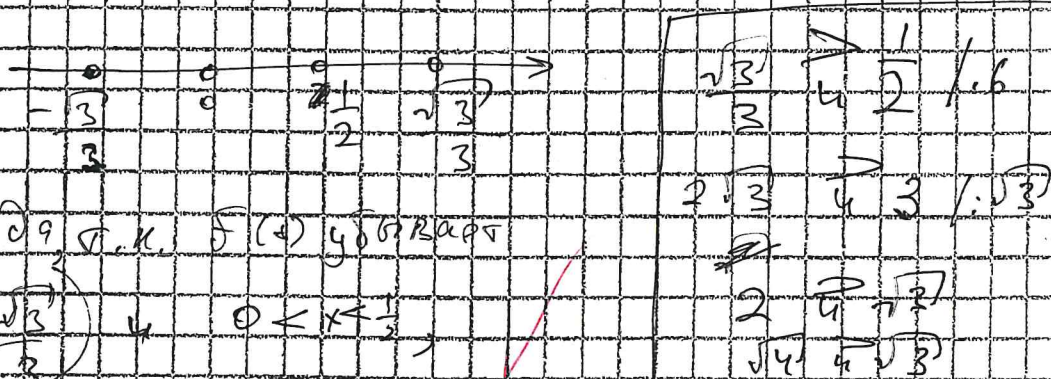
$$= 3\left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



на промежутке $0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ $f(t)$ убывает

Заметим что промежуток $(0; \frac{1}{2})$

входит в промежуток $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$



Вдоль т.к. $f(t)$ убывает

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ и } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$0 < y < \frac{1}{2} \text{ и } x > y, \text{ то } f(y) > f(x)$$

$$f(y)$$

$$y^3 - y > x^3 - x$$

$$y^3 - x^3 > y - x$$

н.т.д.

78

Задача 1

Пусть наше число $\overline{abcd}$. Рассмотрим

$$f = \frac{1000a + 100b + 10c + d}{a + b + c + d} \quad (\text{отношение числа и суммы его цифр})$$

$$f'(d) = \frac{a + b + c + d - 1000a - 100b - 10c - d}{(a + b + c + d)^2} = \frac{-999a - 99b - 9c}{(a + b + c + d)^2}$$

ф.в.с.л
н.т.д.
н.т.д.

т.к. ~~a, b, c, d~~ - цифры, то

$$-999a - 99b - 9c = 0$$

$$(a+b+c+d)^2$$

Тогда $f'(a)$ упрощается

т.к. нам нужно найти f мин, то d должно быть наибольшим, то есть $(d=9)$ (d-цифра)

$$f'(a) = 1000a + 100b + 10c + 1000d - 1000a - 100b - 10c - d$$

$$= (a+b+c+d)^2$$

$$= \frac{900b + 90c + 90d}{(a+b+c+d)^2} > 0$$

$f'(a)$ - возрастающая, тогда для f мин

а должно быть минимальным, значит $(a=1)$

(a-цифра, причем так как $d \neq 0$, то и a не может быть нулем)

$$f'(b) = 100a + 100b + 10c + 100d - 1000a - 100b - 10c$$

$$f'(c) = 10a + 10b + 10c + 100d - 1000a - 100b - 10c - d$$

$$= \frac{-990a - 90b + 90d}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= \frac{-990a - 90b + 90d}{(a+b+c+d)^2} < 0$$

и так $a=1$ и $d=9$

$$-990 - 90b + 90 \cdot 9$$

$$= -990 - 90b + 810$$

$$-90b \leq 0 \leq 90b$$

$$-90b$$

~~$$10 \leq b \leq 9$$~~

т.к. $0 \leq b \leq 9$

$$-810 \leq -90b \leq 0$$

тогда $-909 - 90b \leq 0$

$$f'(c) < 0 \Rightarrow f(c) - 90b/1000000$$

значит f мин. будет при $c=9$ (с-цифра)

$$f'(b) = \frac{100a + 100b + 100c + 100d - 1000a - 100b - 100c - d}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= \frac{-900a + 90c + 99d}{(a+b+c+d)^2}$$

$$-900a + 90c + 99d \geq 0$$

$$-900 \cdot 1 + 90 \cdot 9 + 99 \cdot 1 \geq 0$$

~~$$-900 + 90 \cdot 10$$~~

$$-90 + 90 \geq 0$$

тогда $f'(b) > 0$, значит $f(b)$ - возрастает,

тогда для f мин. $b=0$ (b-цифра)

У нас $a=1, b=0, c=9, d=9$, получим 6-значное число 1099.

~~$$\frac{1099}{1+0+9+9} = \frac{1099}{18}$$~~

его цифр минимально.

Ответ: 1099

Задание 4

$$\cos 2x + \cos 2023 \cdot 2x + \cos 2025 \cdot (2x) = \sin x + \sin 2023 \cdot x + \sin 2025 \cdot x$$



$$\cos 2x - \sin 4x + \cos^{2023} 2x - \sin^{2023} 4x + 2024 (\cos^{2023} 2x - \sin^{2023} 4x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 4x) + (\cos 2x - \sin 4x) (\cos^{2022} 2x + \cos^{2021} 2x \sin 4x + \dots + \cos 2x \sin^{2021} 4x + \sin^{2022} 4x) + 2024 (\cos 2x - \sin 4x) (\cos^{2022} 2x + \cos^{2021} 2x \sin 4x + \dots + \cos 2x \sin^{2021} 4x + \sin^{2022} 4x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 4x) (1 + \cos^{2022} 2x + \dots + \sin^{2022} 4x + 2024 (\cos^{2022} 2x - \sin^{2022} 4x)) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 4x = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin 4x - 1 = 0$$

$$2 (\sin 4x + 1) (\sin 4x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin 4x = -1 \quad \sin 4x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad k \in \mathbb{Z}$$

50

Задача 5

Введём систему координат, как показано на рисунке

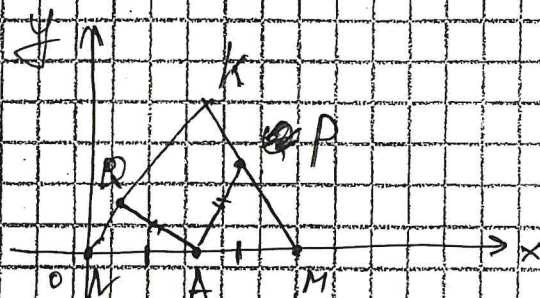
$$M(0; 0)$$

$$N(1; 0)$$

$$K(\frac{1}{2}; \sqrt{3})$$

$$A(\frac{1}{2}; 0) \text{ (середина } MN)$$

НК лежит на прямой



$$y = \sqrt{3}x, \text{ где } P(x_p; y_p), 0 \leq x_p \leq \frac{1}{2}; x_p \neq \frac{1}{4}$$

$$KM \text{ лежит на прямой } y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}, \text{ где } P$$

$$P(x_p; -\sqrt{3}x_p + \sqrt{3}), \frac{1}{2} \leq x_p \leq 1; x_p \neq \frac{3}{4}$$

$$QA^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 3x_0^2$$

$$PA^2 = \left(x_P - \frac{1}{2}\right)^2 + 3(1-x_P)^2$$

$$QA = PA \text{ по условию}$$

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 3x_0^2 = \left(x_P - \frac{1}{2}\right)^2 + 3(1-x_P)^2$$

$$x_0^2 - x_0 + \frac{3}{4} + 3x_0^2 = x_P^2 - x_P + \frac{3}{4} - 6x_P + 3x_P^2$$

$$4x_0^2 - x_0 - 4x_P^2 + 4x_P - 3 = 0$$

$$D = 1 + 6 \cdot 4x_P^2 - 12x_P + 4 = (6x_P - 4)^2$$

$$x_{0,1} = x_P - \frac{3}{4} \text{ т.к. } 0 \leq x_0 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} < x_P \leq 1$$

$$x_{0,2} = 1 - x_P$$

$$Q_1 \left(x_P - \frac{3}{4}; \sqrt{3} \left(x_P - \frac{3}{4} \right) \right) \quad Q_2 \left(1 - x_P; \sqrt{3} (1 - x_P) \right)$$

$$PQ_1^2 = \left(x_P - x_P + \frac{3}{4} \right)^2 + \left(-\sqrt{3} x_P + \sqrt{3} - \sqrt{3} x_P + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2 =$$

$$= \frac{9}{16} + \left(-2\sqrt{3} x_P + \frac{4\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} + 12x_P^2 - 21x_P + \frac{4 \cdot 3}{16} =$$

$$= 12x_P^2 - 21x_P + \frac{39}{4}$$

$$PQ_2^2 = (x_P - 1 + x_P)^2 + (-\sqrt{3} x_P + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} x_P)^2 = x_P^2$$

$$PQ_2 = x_P$$