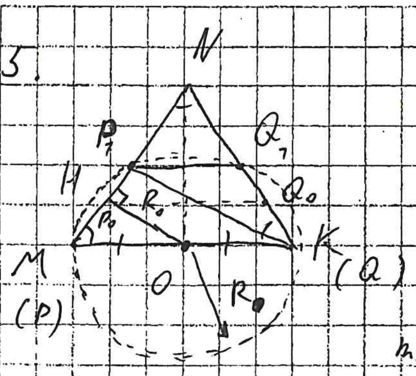
Шифр 08571

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21б	22.03.24	Бендукидзе	[illegible]

1	2	3	4	5
3	0	0	4	7

7б

5. 

~~OM = OK~~ O середина MK

Найду сторону $NK = a$

$S = 1$ по условию, $S = \frac{NK \cdot MN \sin MNK}{2}$

т.к. $\triangle MNK$ равносторонний $\angle MNK = 60^\circ$

$\frac{a^2 \sin 60}{2} = 1$ $\quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\quad a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

Подберу такой радиус R при котором окр $(O;R)$ будет касаться сторон ~~$\triangle MNK$~~ MN и NK. Проведу перпендикуляр из O к MN назову отрезок OH

$\triangle MHO$ $\angle HMO = 60^\circ$, т.к. $\triangle MNK$ - равносторонний

$MO = \frac{MK}{2} = \frac{a}{2}$ $\quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HO}{MO}$ $\quad HO = \frac{MO\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

~~R = OH = R окр~~ OH это минимальный R окр$(O;R)$ при котором окружность пересекает стороны NK, NM при таком радиусе будет две точки пересечения одна со стороной MN, а другая с NK, т.к. они расположены симметрично относительно NO (перпендикуляр к MK) ~~[illegible]~~, то при соединении этих точек полученный отрезок ~~будет~~ PQ будет $\parallel$ MK, это противоречит условию $\Rightarrow$ нужно подобрать радиус при котором

Будет более 2ух точек пересечения окр $(O; R)$ со сторонами NK, NM если $MO > R > HO$ окружность будет пересекать MN и NK в четырех точках, если их соединить получится трапеция ~~сот~~ с основаниями $\parallel MK$ => для отрезка PQ нужно брать значения трапеций. при $R = MO$ окружность будет пересекать $\triangle NMK$ в точках M и K и еще в 2ух точках на сторонах MN и ~~NK~~ NK

$$R \in (HO; MO] \rightarrow R \in \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{2}\right]$$

В случае, когда $R = MO$ $P = P_1$ $Q = K$ => нужно найти отрезок P_1K ~~угол~~ $\angle MP_1K$ лежит на окр $(O; R)$ и опирается на $\varnothing$ MK => $\angle MP_1K = 90^\circ$

$MK = a$ $\angle P_1MK = 60^\circ$ $\sin P_1MK = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P_1K}{MK}$

$P_1K = \frac{MK\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ при уменьшении R до $R = HO$

наполнение трапеция будет уменьшаться и расстояния между основаниями будет уменьшаться => минимум PQ будет являться длина отрезка P_0Q_0 при $R = HO$

$\triangle OP_0Q_0$: $\angle P_0OQ_0 = 180^\circ - \angle MOP_0 - \angle KOQ_0$ т.к. $\angle P_0MO = \angle Q_0KO = 60^\circ$ $\angle P_0OQ_0 = 180 - 30 - 30 = 120^\circ$

$P_0O = OQ_0 = OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ ~~P_0Q_0~~ по теореме косинусов

$P_0Q_0^2 = OP_0^2 + OQ_0^2 - 2\,OP_0\,OQ_0 \cos 120^\circ$

$P_0Q_0 = \sqrt{2HO^2 - 2HO^2\cos 120} = HO\sqrt{3} = \frac{3a}{4} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2}$ =>

~~Ответ: PQ ∈~~ => максимальная длина PQ

приблизительно равна $\frac{3^{\frac{3}{4}}}{2}$ => PQ может меняться от $\frac{3^{\frac{3}{4}}}{2}$ до $3^{\frac{3}{4}}$ вкл.

Ответ: $PQ \in \left(\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{2} ; (\sqrt[4]{3})^3 \right]$

2

$y^2 - x^2 > y - x$

$(y - x)(y + x) > y - x$ ~~т.к. y и x не равны друг другу~~

если $y = x$ $0 \cdot y + x > 0$ $0 > 0$ противоречие => $y \neq x$

т.к. $y \neq 0$ и $x \neq 0$ (из условия 1) ~~можно~~ и $y \neq x$

можно поделить на $y - x$ ~~при этом~~ на

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x > 1 \\ y > x \end{cases} \\ \begin{cases} y + x < 1 \\ y < x \end{cases} \end{array} \right.$$

если $y - x < 0$ $y + x < 1$, иначе $y + x > 1$

т.к. максимально возможные значения x и y не выше $\frac{1}{2}$ $y + x$ не может быть 1 =>

=> $y + x > 1$ решения не имеет при заданных x и y =>

=> $\begin{cases} y + x < 1 \\ y < x \end{cases}$

$y^3 - x^3 > y - x$ т.к. $\begin{cases} y < x \\ y + x < 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} y^2 + xy + x^2 < 1 \\ y < x \end{cases}$

Даже если предположить, что x и $y = \frac{1}{2}$

$y^2 + xy + x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$ => при заданных условиях

x и y ~~удовлетворяют~~ удовлетворяют неравенству $y^3 - x^3 > y - x$

скобы

Шифр 08571

1

Т.к. нужно найти наибольшее отношение, ~~...~~ четвертого разряда следует брать 1, тогда

30

$\frac{1000}{1}$ при числителе всегда будет гораздо больше

знаменатель нужно будет брать один или как можно меньше. ~~...~~ разряд единиц меньше всего влияет на число, => ~~...~~ при этом он сильно будет влиять на знаменатель => его нужно брать ~~наименьшим~~ наибольшим $\frac{1009}{10}$ аналогично и разряд десятков $\frac{1099}{19}$ при увеличении сотен отношение будет также больше => оставляем 0

Ответ: $\frac{1099}{19}$

4

40

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024\sin^{2025}(x)$

$\cos 2x - \sin x + \cos^{2023}(2x) - \sin^{2023}(x) + 2024(\cos^{2025}(2x) - \sin^{2025}(x)) = 0$

вынесу общий множитель $\cos 2x - \sin x$ =>

одним из решений является $\cos 2x - \sin x = 0$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$ $\quad t = \sin x$

$2t^2 + t - 1 = 0$ $\quad t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$

$D = 1 + 8 = 9$

Место для скобы

Шифр

$\sin x = -1$ $\qquad\qquad$ $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

дробь знам-ль будет неотр-ельн при любом $x \Rightarrow$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$