

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
20		Корнилов	К
Шифр			041979

Задание №1;

Найти мин. значение;

$$(z+a-b)^2 + (2b-c)^2 + (3+c-a)^2;$$

Разобьем на составные части выражение.

Значение будет минимальным, если каждый слагаемый будет стремиться к нулю.

Получим систему;

$$\begin{cases} z+a-b=0 \rightarrow a=b-z; & (1) \\ 2+b-c=0 \rightarrow c=b+2; & (2) \\ 3+c-a=0 & (3) \end{cases}$$

Из (1), (2), (3):

$$3+b+c-b+z=0$$

$0b = -10$ — неразрешимая система;

1	2	3	4	5	Σ
5	4	4	0	20	11

Тогда минимум $\neq 0$;

Введем функцию; $f = (z+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2$

Методом частных производных найдем минимальные значения, сверя функцию и систему линейных уравнений;

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(z+a-b) - 2(3+c-a) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2(z+a-b) + 2(2+b-c) = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2(2+b-c) + 2(3+c-a) = 0;$$

Приравняем полученные выражения к нулю и составим систему

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача №1 (продолжение 1):

$$\begin{cases} 2(7+a-b) - 2(3+c-a) = 0 \\ -2(7+a-b) + 2(2+b-c) = 0 \\ -2(2+b-c) + 2(3+c-a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 + 2a - 2b - 6 - 2c + 2a = 0 \\ -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = 0 \\ -4 - 2b + 2c + 6 + 2c - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c = 4 : 2 \\ -2a + 4b - 2c = 10 : 2 \\ -2a - 2b + 4c = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - b - c = 2 \text{ (1)} \\ -a + 2b - c = 5 \text{ (2)} \\ -2a - 2b + 4c = -14 \text{ (3)} \end{cases} \Rightarrow \text{решим первые 2 выражения относительно } a \text{ и } b$$

$$\textcircled{1} \quad c = 2a - b - 2 \text{ (4)}$$

$$\text{Из } \textcircled{4} \text{ и } \textcircled{2}: -2a + 4b - 2(2a - b - 2) = 5 \\ -2a + 4b - 4a + 2b + 4 = 5; \\ 6b - 6a = 1$$

$$\text{Из } \textcircled{4} \text{ и } \textcircled{1}: -a + 2b - (2a - b - 2) = 5; \\ -a + 2b - 2a + b + 2 = 5; \\ 3b - 3a = 3;$$

$$b = a + 1 \text{ (5)}$$

$$\text{Из } \textcircled{5}, \textcircled{4}, \textcircled{3}:$$

$$\begin{aligned} -2a - 2(a+1) + 4(2a - (a+1) - 2) &= -14 \\ -2a - 2a - 2 + 8a - 4a + 4 - 8 &= -14 \\ -14 &= -14 \end{aligned}$$

Из этого результата следует, что a — любое число

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задание №1 (продолжение 2);

Пусь $a = 0$;

Тогда $b = 0 + 1 = 1$; (из 5)

Тогда $c = 2 \cdot 0 - 1 - 2 = -3$ (из 9)

Подставим эти значения в исходное
выражение;

$$\begin{aligned} & (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (8+c-a)^2 = \\ & = (7+0-1)^2 + (2+1+3)^2 + (8-3-0)^2 = \\ & = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108 \end{aligned}$$

исходное значение исходного
выражения.

Ответ: 108.

Задание №3:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0;$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

Тогда $\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 \leq 1; \\ x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 \geq -1; \end{cases} \rightarrow \text{т.к. } \cos x \in [-1; 1]$

Пусь $\sqrt{x^2+1} = t$, тогда $t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1$;

Произведет замену;

$$\begin{cases} t^2 - 1 - 6t + 11 - 1 \leq 0; \\ t^2 - 1 - 6t + 11 + 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} t^2 - 6t + 9 \leq 0; \\ t^2 - 6t + 11 \geq 0; \end{cases} \quad (1)$$

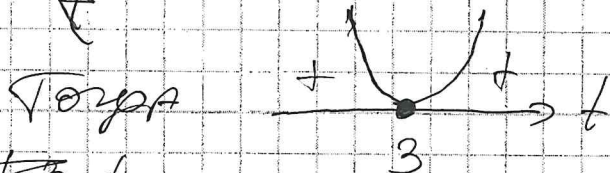
и (1): $21 = 9 - 11 = -2$ — всегда больше нуля,
при любых t

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Заметим $\sqrt{3}$ (произведение t)

$$(t-3)^2 \leq 0$$

$t^2 - 6t + 11 \geq 0$ — не влияет на
однажды решений, т.к.
выполняется при любом t ;



$(t-3)^2 \leq 0$ выполняется только при $t=3$,
когда $(t-3)^2 = 0$;

$t=3$, обратная замена; $t = \sqrt{x^2+1}$

$$\sqrt{x^2+1} = 3;$$

$$x^2+1 = 9;$$

$$x^2 = 8;$$

$$x = \pm 2\sqrt{2};$$

Выполним проверку, подставив значения
в $\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$; ~~не подходит~~

1) $x = 2\sqrt{2}$;

$$\cos\left(\frac{8 + 4 - 4}{18}\right) = \cos\frac{8}{18} = \cos\frac{4}{9} \text{ — не подходит}$$

2) $x = -2\sqrt{2}$;

$$\cos\left(\frac{8 - 4 - 4}{18}\right) = \cos 0 = +1 \text{ — подходит}$$

Тогда $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2};$

Ответ: $-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача №2:

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506;$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1;$$

Найти: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$;

При этом x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$.

Решение:

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$,

то каждый x_i (где $i=1, i=2, i=3$ или $i=4$)

удовлетворяет следующему уравнению:

$$Q(x_i):$$

$$x_i^4 + x_i^3 - 4x_i^2 + 1 = 0;$$

$$\text{Отсюда: } x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 - 1 \quad (1)$$

Выразим $P(x_i)$ через x_i :

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 + x_i^2 - x_i + 506 \quad (2)$$

Используем (1) для упрощения x_i^6 и x_i^5 в (2):

$$\bullet x_i^5 = x_i \cdot x_i^4 = x_i(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) = -x_i^4 - x_i^3 + 4x_i^2;$$

$$\bullet x_i^6 = x_i \cdot x_i^5 = x_i(-x_i^4 - x_i^3 + 4x_i^2) = -x_i^5 - x_i^4 + 4x_i^3;$$

Подставим их в $P(x_i)$:

$$P(x_i) = 1 - x_i^5 + 4x_i^4 - x_i^2 - x_i + 506 = 1 - (-x_i^5 - x_i^4 + 4x_i^3) + 4x_i^4 - x_i^2 - x_i + 506 =$$

$$\text{Упростим: } P(x_i) = -x_i^5 - x_i^4 + 4x_i^3 - 2x_i + 506 \quad (3)$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Заранее $\sqrt{2}$ (произведение 1):

Из ~~(1) и (2)~~: Из (1) и (2) знаем, что
 $x_i^5 = 4x_i^3 - x_i^4 - x_i$; ? как и ранее.

Тогда из этого и из (3):

$$\begin{aligned} P(x_i) &= -(4x_i^3 - x_i^4 - x_i) - x_i^4 + 4x_i^3 - 2x_i + 506 = \\ &= -4x_i^3 + \underline{x_i^4} + \underline{x_i} - \underline{x_i^4} + \underline{4x_i^3} - \underline{2x_i} + 506 = \\ &= -x_i + 506; \end{aligned}$$

То есть $[P(x_i) = -x_i + 506]$; ~~(4)~~

Найдем сумму $(P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4))$; (4)

$$\begin{aligned} &= -x_1 + 506 - x_2 + 506 - x_3 + 506 - x_4 + 506 = \\ &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024; \end{aligned}$$

$$S = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024 \quad (5)$$

По теореме Виета (x_1, x_2, x_3, x_4) — корни $Q(x)$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{K_3}{K_4}, \text{ где } K_3 - \text{коэффициент при } x^3$$

$$K_3 = 4, K_4 = 1$$

$$\Rightarrow [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4] \quad (6)$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Из (5), (6): $S = -(-4) + 2024 = 4 + 2024 = 2028$;

Ответ: $S = 2025$ (S — сумма) X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача №4:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа; (1)
При этом $(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n)$

Доказать: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

Решение:

Применим к числам $x_1, x_2, \dots, x_n$ из неравенства арифметическая и геометрическая — неравенства между средними арифметическими и геометрическими для степеней $(n-1)$:

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

По условию имеет равенство (1), тогда:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}};$$

Упростим неравенство:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}} \geq n;$$

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}} \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}} \geq n \Rightarrow \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)} \geq n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}}_{\text{ср. геом}} \geq n$$

Из нер-ва следует,
что ср. геом чисел
 $x_1, x_2, \dots, x_n$
не меньше n $\uparrow$
($x_i \geq n$)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задание 14 (продолжение 1)

Рассмотрим выражение $(x_i - n + 1)$ из нер-ва, которое необходимо доказать;

② $x_i > 0$ (по условию);

Пуск $(y_i = x_i - n + 1)$ ~~②~~

из ②, ③ $\Rightarrow x_i = y_i + n - 1$ ③

из ②, ③: $y_i + n - 1 > 0$;
 $y_i > -n + 1$;

$y_i > -n + 1$ по этому мы докажем, что $\{x_i \geq n\}$;

При этом $x_i > 0$ по условию

~~Когда $y_i \geq 1$ из $x_i \geq n$~~

Когда $y_i \geq 1$ и $\forall y_i \geq 1$

П.к. $y_i > 1$ из $\boxed{y_i \geq 1}$ и неравенства между средними геом.:

$(y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$;

Отсюда $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n \geq 1$;

Подставим $y_i = (x_i - n + 1)$;

$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

что и требовалось доказать $\times$