

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
18		Емельянов	Ем
Шифр			010717

1) $(4+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$. Найдём его минимальное значение.
Каждый квадрат принимает минимальное значение 0, когда соответствующее выражение равно 0. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4+a-b=0 \\ 2+b-c=0 \\ 9+c-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-4 \\ b-c=-2 \\ c-a=-9 \end{cases}$$
Сложим все три уравнения:

$$(a-b) + (b-c) + (c-a) = -4 - 2 - 9$$

$$0 = -18$$

получили противоречие, значит, система не имеет решений, и выражение не может быть равно нулю. Следовательно, найдём миним.

Обозначим $x = 4 + a - b$, $y = 2 + b - c$, $z = 9 + c - a$ тогда:
 $x + y + z = 4 + a - b + 2 + b - c - 9 + c - a = -3$ т.к. квадраты $(x^2 + y^2 + z^2)$ минимальны при $x = y = z = -1$ (чтобы сумма была -3).
 Подставим 6 в $(x^2 + y^2 + z^2)$: $(6^2 + 6^2 + 6^2) = 108$
 Ответ: 108

2) Дано: $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 + 506$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1$

нужно найти: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

Решение: т.к. x_1, x_2, x_3, x_4 - корни многочлена $Q(x)$, то подставим их в уравнение $Q(x) = 0$, получим: $x_i^4 + x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1 = 0$
 (для каждого из остальных корней). Выразим x_i^4 и x_i^3 через x_i^2 и x_i :
 $x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 + x_i - 1$
 $x_i^5 = x_i \cdot x_i^4 = x_i(-x_i^3 + 4x_i^2 + x_i - 1) = -x_i^4 + 4x_i^3 + x_i^2 - x_i$
 Подставим в $P(x_i)$:
 $P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 + x_i^2 + 506$
 $x_i^6 = x_i^2 \cdot x_i^4 = x_i^2(-x_i^3 + 4x_i^2 + x_i - 1) = -x_i^5 + 4x_i^4 + x_i^3 - x_i^2$
 $x_i^5 = -x_i^4 + 4x_i^3 + x_i^2 - x_i$
 $x_i^6 = -(-x_i^4 + 4x_i^3 + x_i^2 - x_i) + 4x_i^4 + x_i^3 - x_i^2 = x_i^4 - 4x_i^3 - x_i^2 + x_i + 4x_i^4 + x_i^3 - x_i^2 = 5x_i^4 - 3x_i^3 - x_i^2 + x_i$
 $P(x_i) = (5x_i^4 - 3x_i^3 - x_i^2 + x_i) + (-x_i^4 + 4x_i^3 + x_i^2 - x_i) - 4x_i^4 + x_i^2 + 506$
 $P(x_i) = 5x_i^4 - 3x_i^3 - x_i^2 + x_i - x_i^4 + 4x_i^3 + x_i^2 - x_i - 4x_i^4 + x_i^2 + 506$
 $P(x_i) = (5x_i^4 - x_i^4 - 4x_i^4) + (-3x_i^3 + 4x_i^3) + (-x_i^2 + x_i^2 + x_i^2) + (x_i - x_i) + 506$
 $P(x_i) = 0x_i^4 + 1x_i^3 + 1x_i^2 + 0x_i + 506 = x_i^3 + x_i^2 + 506$
 Тогда: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (x_1^3 + x_1^2 + 506) + (x_2^3 + x_2^2 + 506) + (x_3^3 + x_3^2 + 506) + (x_4^3 + x_4^2 + 506)$
 $= (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 4 \cdot 506$
 Найдём сумму кубов корней: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$
 Найдём сумму квадратов корней: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$

По Виетаму:
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$
 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -4$
 $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1$
 $x_1x_2x_3x_4 = 1$

Подставим:
 $(-1)^3 - 3(-1)(-4) + 3(1) = -10$

Окончательный ответ:
 $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -10 + 4 \cdot 506 = 2014$ Ответ: 2014

4) Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$, доказать неравенство.

Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}},$$

по условию левая часть равна:

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}}.$$

Упростим:

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Обозначим $P = x_1 x_2 \dots x_n$,

тогда: $\frac{P}{n} \geq P^{\frac{n-1}{n}}$ возведем обе части в степень n $\left(\frac{P}{n}\right)^n \geq P^{n-1}$

Делим на P^{n-1} : $\frac{P}{n^n} \geq 1$ то есть $P \geq n^n$, теперь докажем неравенство раскрыв скобки: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

применим подстановку: $y_i = x_i - n + 1$, тогда $x_i = y_i + n - 1$ $y_1 y_2 \dots y_n \geq 1$

и к неравенству $x_1 x_2 \dots x_n \geq n^n$, и если предположить, что хотя бы один x_i слишком мал, то другой должен быть достаточно большим чтобы произведение оставалось не достаточно ~~большим~~ ~~меньше~~ n^n . Это приводит к тому, что хотя бы один $y_i \geq 1$, а значит, и произведение тоже не меньше 1. Таким образом, неравенство $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$ доказано ~~не доказано~~.

$$3) x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{28} = 0$$

3) ~~$x^2 + 1 + 11 - 6$~~ введем переменную t : $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $t \geq 1$, подставим
 $x^2 - 6t + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{28} = 0$, так как $-1 \leq \cos \leq 1$, то мы
 получаем $+10 \leq \cos \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{28} \leq 12$, запишем как систему

$$\begin{cases} x^2 - 6t + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6t + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6t + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6t + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{x^2 + \sqrt{2x-4}}{28} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$t = \sqrt{x^2 + 1}$$

$\sqrt{5} = \sqrt{x^2 + 1}$ введем обе стороны в квадрат, чтобы сократить
 квадратные корни

$$5 = x^2 + 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Ответ: из этого - 2 это посторонний корень?