

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
23		Есменев	Есменев
Шифр		040219	

$$\begin{array}{r|rr|rr|rr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Sigma \\ \hline 4 & 7 & 7 & -5 & 23 \end{array}$$

N1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 = ?$$

Возьмем производную a, b, c и приравняем к нулю.

$$f(a, b, c) = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

$$f'(a) = 2(7+a-b) \cdot 1 + 2(2+b-c) \cdot (-1) = 14 + 2a - 2b - 4 - 2c - 2a = 4a - 2b - 2c - 4$$

$$f'(b) = 2(7+a-b) \cdot (-1) + 2(2+b-c) \cdot 1 = -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10$$

$$f'(c) = 2(2+b-c) \cdot (-1) + 2(9+c-a) \cdot 1 = -2(2+b-c) + 2(9+c-a) = -4 - 2b + 2c + 18 + 2c - 2a = 14 - 2a - 2b + 4c$$

Приравняем частные производные к нулю:

$$4a - 2b - 2c - 4 = 0 \quad \text{I}$$

$$-10 - 2a + 4b - 2c = 0 \quad \text{II}$$

$$14 - 2a - 2b + 4c = 0 \quad \text{III}$$

Разделим каждое уравнение на 2

$$2a - b - c - 2 = 0 \quad \text{I}$$

$$-5 - a + 2b - c = 0 \quad \text{II}$$

$$7 - a - b + 2c = 0 \quad \text{III}$$

Выразим b через a из уравнения I

$$b = 2a - c - 2$$

Подставим это b в II уравнение

$$-5 - a + 2(2a - c - 2) - c = 0$$

$$-5 - a + 4a - 2c - 4 - c = 0$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

010279

$$3a - 3c - 9 = 0$$

$$a - c - 3 = 0$$

$$c = a - 3$$

Выразим c через a подставим $c = a - 3$ в выражении для b .

$$b = 2ac - 2 = 2a - (a - 3) - 2 = 2a - a + 3 - 2 = a + 1$$

Имеем зависимость: $b = a + 1$ и $c = a - 3$

Подставим в $f(a; b; c)$

получим это минимизируем, а не максимизируем?

$$f(a) = (7 + a - (a + 1))^2 + (2 + (a + 1) - a)^2 + (9 + (a - 3) - a)^2$$

$$f(a) = (7 + a - a - 1)^2 + (2 + a + 1 - a)^2 + (9 + a - 3 - a)^2$$

$$f(a) = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

Таким образом, значение выражения не зависит от a и является постоянной. Минимальное значение равно 108.

Удовлетворяющие условию $b = a + 1$ и $c = a - 3$

Например при $a = 0$ $b = 1$.

$$(7 + 0 - 1)^2 + (2 + 1 - 0)^2 + (9 + (-3) - 0)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$$

Выражение = 108

$$\text{Ответ: } P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 108$$

№2.

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^3 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \rightarrow$ корни $Q(x)$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями многочлена $Q(x)$, то для каждого

корня выполняется равенство $Q(x_i) = 0$, то есть:

$$x_i^4 + x_i^3 - 4x_i^2 + 1 = 0$$

можно выразить x_i^4

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 - 1$$

Используя это выражение, чтобы упростить $P(x_i)$

начнем с понижение степени x^4 в $P(x_i)$

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 - x_i^3 - x_i^2 - x_i + 506$$

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 - 4(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) - x_i^3 - x_i^2 - x_i + 506$$

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 + 4x_i^3 - 16x_i^2 + 4 - x_i^3 - x_i^2 - x_i + 506$$

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 + 4x_i^3 - 15x_i^2 - x_i + 510$$

Выразим x_i^5 и x_i^6 через меньшие степени

$$x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 - 1$$

Сначала выразим x_i^5

$$x_i^5 = x_i \cdot x_i^4 = x_i(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) = -x_i^4 + 4x_i^3 - x_i$$

Подставим x_i^5

$$x_i^5 = -x_i^4 + 4x_i^3 - x_i$$

$$x_i^5 = -(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) + 4x_i^3 - x_i = x_i^3 - 4x_i^2 + 1 + 4x_i^3 - x_i = 5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1$$

Теперь выразим x_i^6

$$x_i^6 = x_i^2 \cdot x_i^4 = x_i^2(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) = -x_i^5 + 4x_i^4 - x_i^2$$

$$\text{Подставим: } x_i^5 = 5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1 \text{ и } x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 - 1$$

$$x_i^6 = -(5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1) + 4(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) - x_i^2$$

$$x_i^6 = -5x_i^3 + 4x_i^2 + x_i - 1 - 4x_i^3 + 16x_i^2 - 4 - x_i^2$$

$$x_i^6 = -9x_i^3 + 19x_i^2 - 5$$

Подставим выражения для x_i^6 и x_i^5 в $P(x)$ упрощаем

$$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 + 4x_i^3 - 15x_i^2 - x_i + 510$$

$$P(x_i) = (-9x_i^3 + 19x_i^2 - 5) + (5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1) + 4x_i^3 + 15x_i^2 - x_i + 510$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$P(x_1) = 0x_1^4 + (-9 + 5 + 4)x_1^3 + (19 - 4 - 15)x_1^2 + (1 - 1 - 1)x_1 + (5 + 1 + 3 + 0)$$

$$P(x_1) = 0x_1^4 + 0x_1^3 + 0x_1^2 = x_1 + 506$$

$$P(x_1) = -x_1 + 506$$

Теперь найдем сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 506) + (-x_2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506)$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \cdot 506$$

перу Т. Введем для $Q(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x^3$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-(x^3)}{x^4} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ x^4 &= 1 \end{aligned}$$

Подставим в выражение для суммы $P(x_i)$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 4 \cdot 506 = 2025$$

13.

Ответ $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 2025$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos \frac{x^2 - \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

Известно что значения косинуса всегда в диапазоне $[-1; 1]$

Аналогично:

$$-1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \leq 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \leq 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 10 \leq 0$$

Пусть $y = x^2$, тогда $y \geq 0$

$$y - 6\sqrt{y+1} + 10 \leq 0$$

$$y + 10 \leq 6\sqrt{y+1}$$

Т.к. все части могут быть неотрицательными, возведем обе части в квадрат

$$(y+10)^2 \leq (6\sqrt{y+1})^2$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$y^2 + 20y + 100 \leq 36(y+1)$$

$$y^2 + 20y + 100 \leq 36y + 36$$

$$y^2 - 16y + 64 \leq 0$$

$$(y-8)^2 \leq 0$$

Т.к. квадрат любого числа неотрицателен, то равенство $(y-8)^2 \leq 0$ может выполняться только $(y-8)^2 = 0$.

$$y-8=0, \text{ то есть } y=8$$

Рассмотрим левое равенство

$$-8 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

$$-12 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2+1}$$

$$6\sqrt{x^2+1} \leq x^2 + 12$$

$$\text{Положим } y = x^2$$

$$6\sqrt{y+1} \leq y+12$$

Возведем обе части в квадрат при $y \geq 0$

$$(6\sqrt{y+1})^2 \leq (y+12)^2$$

$$36(y+1) \leq y^2 + 24y + 144$$

$$36y + 36 \leq y^2 + 24y + 144$$

$$0 \leq y^2 - 12y + 108$$

Рассмотрим квадратный трех.

$$y^2 - 12y + 108 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 108 = 144 - 432 = -288 < 0$$

Т.к. $D < 0$, а коэффициент при y^2 положительный, то неравенство

$$y^2 - 12y + 108 \geq 0, \text{ это неравенство выполняется для всех } y.$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Таким образом возможно для $y = x^2$ это $y = 8$.

Подставим $x^2 = 8$ в исходное уравнение.

$$8 - 6\sqrt{8+1} + 11 - \cos\left(\frac{8+\sqrt{2x}-4}{18}\right) = 0$$

$$19 - 6 \cdot 3 \cos\left(\frac{4+\sqrt{2x}}{18}\right) = 0$$

$$1 - \cos\left(\frac{4+\sqrt{2x}}{18}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{4+\sqrt{2x}}{18}\right) = 1$$

$$\frac{4+\sqrt{2x}}{18} = 2\pi k$$

$$4+\sqrt{2x} = 36\pi k$$

$$\sqrt{2x} = 36\pi k - 4$$

$$x = \frac{36\pi k - 4}{\sqrt{2}} = \frac{36\pi k}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}\pi k - 2\sqrt{2}$$

Рассмотрим случай $x = -2\sqrt{2}$.

$$x = -2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi k - 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 18\sqrt{2}\pi k$$

$$0 = 18\sqrt{2}\pi k$$

$$k = \frac{4}{18\pi} = \frac{2}{9\pi}$$

$$k = \frac{2}{9\pi}$$

$x = 2\sqrt{2}$ не является решением. Таким образом $x = -2\sqrt{2}$, единственное

решение.

Проверим решение $x = -2\sqrt{2}$.

$$x^2 = (-2\sqrt{2})^2 = 8.$$

$$x^2 = 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos\left(\frac{x^2+\sqrt{2x}-4}{18}\right) = 8 - 6\sqrt{8+1} + 11 - \cos\left(\frac{8+\sqrt{2(-2\sqrt{2})}-4}{18}\right) =$$

$$8 - 6\sqrt{9} + 11 - \cos\left(\frac{8-4-4}{18}\right) = 8 - 6 \cdot 3 + 11 - \cos\left(\frac{0}{18}\right) = 8 - 18 + 11 - \cos(0) =$$

$$= 8 - 18 + 11 - 1 = 19 - 19 = 0.$$

Решением уравнения является $x = -2\sqrt{2}$.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

15.

Координаты вершин куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где ребра куба равны a :

$$A = (0; 0; 0)$$

$$B = (a; 0; 0)$$

$$C = (a; a; 0)$$

$$D = (0; a; 0)$$

$$A_1 = (0; 0; a)$$

$$B_1 = (a; 0; a)$$

$$C_1 = (a; a; a)$$

$$D_1 = (0; a; a)$$

Направляющий вектор прямой AC ,

$$\vec{AC} = C - A = (a - 0; a - 0; a - 0) = (a; a; 0)$$

Упрощая: $\vec{C} = (1; 1; 0)$

Плоскость α перпендикулярна прямой AC , поэтому нормальный вектор плоскости α

$$\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$$

Направляющий вектор прямой CD ,

$$\vec{CD} = D - C = (0 - a; a - a; a - 0) = (-a; 0; a)$$

Упрощая $\vec{C}_2 = (-1; 0; 1)$

Плоскость β параллельна прямой CD , значит $\vec{C}_2$ является направляющим вектором плоскости β .

$$\vec{n}_\beta \cdot \vec{C}_2 = 0.$$

Пусть $\vec{n}_\beta = (x; y; z)$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$(x, y, z) \cdot (-1, 0, 1) = -x + z = 0 \Rightarrow z = x$$

$$\vec{n}_B = (x, y, z)$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_B|}{|\vec{n}_2| |\vec{n}_B|} = \frac{|(-1, 0, 1) \cdot (x, y, z)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{|x - z|}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Пусть $y = kx$

$$\cos \varphi = \frac{|x - kx|}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + (kx)^2 + x^2}} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{2} \sqrt{2 + k^2}} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{2(2 + k^2)}}$$

Рассмотрим функцию $f(k) = \cos^2 \varphi = \frac{(1 - k)^2}{2(2 + k^2)} = \frac{1 - 2k + k^2}{4 + 2k^2}$

Найдем производную

$$f'(k) = \frac{(2 + 2k)(4 + 2k^2) - (1 - 2k + k^2)4k}{(4 + 2k^2)^2} = 0$$

$$(2 + 2k)(4 + 2k^2) - (1 - 2k + k^2)4k = 0$$

$$8 + 4k^2 + 8k + 4k^3 - (4k + 4k^2 + 4k^3) = 0$$

$$8 + 4k^2 - 4k^2 = 0$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$$(k - 1)(k + 1) = 0$$

$$k = 1 \text{ или } k = -1$$

При $k = 1$; $y = x$; $\vec{n}_B = (x, x, x)$ Пусть $x = 1$; $\vec{n}_B = (1, 1, 1)$

$$\cos \varphi = \frac{|1 - 1|}{\sqrt{2(2 + 1^2)}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \varphi = \arccos(0) = 90^\circ$$

При $k = -1$; $y = -x$; $\vec{n}_B = (x, -x, x)$ Пусть $x = 1$; $\vec{n}_B = (1, -1, 1)$

$$\cos \varphi = \frac{|1 - 1|}{\sqrt{2(2 + (-1)^2)}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \varphi = \arccos(0) = 90^\circ$$

Наибольший угол соответствует наибольшему значению $\cos \varphi$

то есть $\varphi = 30^\circ$ Ответ: Наибольший угол между плоскостями 30°

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

нч.

Решая поочередно уравнения $(x_i - n + 1)$

$$\sqrt[n]{(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)} \leq (x_1 - n + 1) + (x_2 - n + 1) + \dots + (x_n - n + 1)$$

$$\sqrt[n]{(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) + \dots + (x_n - n + 1)} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) -$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n^2$$

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \text{ а по неравенству Гюльмана}$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \quad (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n-1} \leq \left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \right)^{1/n}$$

$y_i = x_i - n + 1$ а тогда $x_i = y_i + n - 1$ тогда

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) = y_1 y_2 \dots y_n$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq 1 \quad y_1 x_2 \dots x_n \geq n \quad y_i = y_i + n - 1$$

$$(y_1 + n - 1)(y_2 + n - 1) \dots (y_n + n - 1) \geq n^n$$

$$\text{т.к. } x_1 x_2 \dots x_n \geq n^n \quad y_1 y_2 \dots y_n = 1$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Доказано