Место для скобы

Шифр 09247

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23б	23.03.24	Гендрина	

① Р-м число 1111. Его отношение к сумме цифр равно $\frac{1111}{4}$. Теперь р-м 2222. Его отношение к сумме цифр – $\frac{2222}{2+2+2+2} = \frac{1111}{4}$. Аналогично $\frac{3333}{3\cdot4} = \frac{1111}{4}$; ... ; $\frac{9999}{9\cdot4} = \frac{1111}{4} = 277{,}75$.

1	2	3	4	5
5	6	2	3	7

Очевидно, что это отношение достаточно большое, потому начнём действовать от обратного: будем выбирать числа достаточно сильно различающиеся. Ясно, что теперь нас интересуют числа ~~от~~ 0, 1, 9. Ясно, что 0 не может стоять в начале, а числа должны быть в порядке возрастания для того, чтобы в отношении числитель был меньше. Вторым будет стоять 0, а первой 1. Если мы хотим наибольшую сумму чисел остальные две ~~числа~~ цифры должны быть большими. Р-м числа 1089 и 1099

$\frac{1089}{18} > \frac{1099}{18}$, а т.к цифр больше 9 у нас нет, 1099 искомое число

5б

Ответ: 1099

② По условию $0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$.

1) Р-м $y^2-x^2>y-x$.

$$(y-x)(y+x)-(y-x)>0$$

$$(y-x)(y+x-1)>0.$$

Р-м выражение $y+x-1$, $x<\frac{1}{2}$, $y<\frac{1}{2}$ =>

=> $x+y<1$ => $y+x-1<0$.

т.к $(y-x)(y+x-1)>0$, то $y-x<0$.

2) Р-м $y^3-x^3 \overset{?}{>} y-x$. Пусть это неверно, и $y^3-x^3\leq y$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)-(y-x)\leq 0$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2-1)\leq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} y<\frac{1}{2} \Rightarrow y^2<\frac{1}{4} \\ x<\frac{1}{2} \Rightarrow x^2<\frac{1}{4} \\ \left.\begin{array}{l} x<\frac{1}{2} \\ y<\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow xy<\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y^2+xy+x^2<\frac{3}{4}$$

Тогда ~~y^2+xy+x^2~~

$y^2+xy+x^2-1<-\frac{1}{2}<0$

Но $y-x>0$ (п.1) а значит, $(y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0$

Противоречие => $y^3-x^3>y-x$ ч.т.д.

6б

Место для скобы

Шифр 09247

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$

$P(x) - a_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x \ \vdots\ x$

Если $x = 17$, то $P(17) - a_0 \ \vdots\ 17 \Rightarrow 2024 - a_0 \ \vdots\ 17.$

Отсюда следует, что необходимо найти такие a_0, чтобы выражение $2024 - a_0$ было ~~делимым~~ кратно 17.

$2023 : 17 = 119$, поэтому из 2024 ~~надо~~ достаточно вычесть 1 и прибавлять и вычитать числа кратные 17,

т. е $a_0 = 1 + 17k$, где k ~~- целое~~ $\in \mathbb{Z}$

по условию (2) $|a_0| < 999$

$\cancel{a_0}|1+17k| < 999$

$-999 < 1+17k < 999$

$-1000 < 17k < 998$

$-\frac{1000}{17} < k < \frac{998}{17}$

$-58 \leq k \leq 58$

Аналогично, при $x = 101$

$2020 : 101 = 20$

Достаточно вычесть 4 и прибавить $101n$.

$|4 + 101n| < 999$

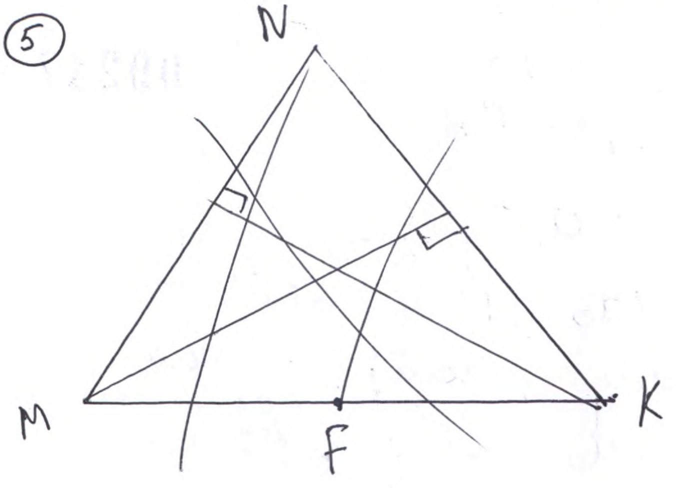
$-999 < 4 + 101n < 999$

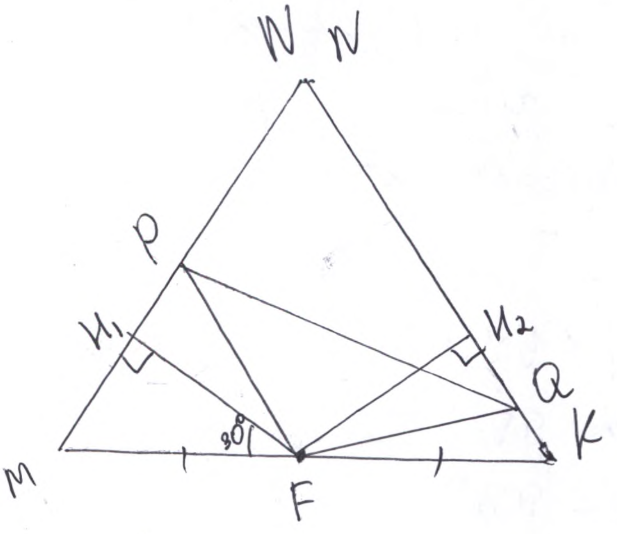
$-1003 < 101n < 995.$

$-9 < n < 9.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a_0 = 1 + 17k,\ k \in [-58; 58] \\ a_0 = 4 + 101n,\ n \in [-9; 9] \end{array}\right.$

⑤





$S = 1$; PQ

Решение:

Т.к PQ ~~∦~~ MK, но PF = FQ, то, проведя из т. F высоты FH_1 и FH_2, замечаем, что т P и т Q не должны быть по одну сторону от H_1H_2, в противном случае ~~они~~ ~~рав~~ PQ ∥ MK.

$$\left.\begin{aligned} &PF = FQ \\ &\angle H_1 = \angle H_2 = 90^0 \\ &H_1F = FH_2 \text{ (т.к они сим-ны от NF)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle PH_1F = \triangle FQH_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2Q = PH_1$$

Точка Q может „скользить" по H_2K.

Пусть $x = H_2Q$.

~~x_n~~ ~~FK=~~ Пусть a – сторона △, тогда $FK = \frac{a}{2}$

$\angle K = 60^0 \Rightarrow \angle KFH_2 = 30^0 \Rightarrow H_2K = \frac{1}{2}FK = \frac{a}{4}$

$FQ = \cancel{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}}$ $\cancel{\sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{16}}}$ $\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + x} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + x}$

Место для скобы

Шифр 09247

~~PQ Заметим, что при увеличение x угол $\angle PFQ$ уменьшается~~

~~При $x=0$ $\angle PFQ = 120^\circ$, при $x=\frac{a}{4}$, $\angle PFQ = 90^\circ$.~~

~~По Th косинусов: $PQ = \sqrt{2FQ^2 - 2FQ^2 \cos\angle PFQ}$~~

~~При x увеличив-ся FQ возрас-т~~

~~$2FQ \cdot \cos\angle PFQ$ ↑~~

заметим, что угол PFQ при любом x – равен 120°.

По Th косинусов $PQ = \sqrt{3FQ^2}$

1 случ. x может быть равен $0 \Rightarrow$ Q и H_2 совпадают,

2 случ x может быть равен $H_2K \Rightarrow$ K и Q совпадают.

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} =$

1) $x = 0$ $FQ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow PQ = \sqrt{3 \cdot \frac{3a^2}{16}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{16 \cdot \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ $\sqrt{\frac{9}{4\sqrt{3}}}$

2) $x = H_2K = \frac{a}{4}$ $FQ = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{3a^2}{16}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{3 \cdot \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{4\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{5\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}$

~~Ответ: $PQ \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{5\sqrt{3}}}{2}\right]$~~

Ответ: $PQ \in \left[\sqrt{\frac{9}{4\sqrt{3}}}; \sqrt[4]{3}\right]$

7б

(4) $(\cos 2x - \sin x) + (\cos^{2023}(2x) - \sin^{2023}(x)) +$
$+ (2024 \cdot \cos^{2025}(2x) - 2024 \sin^{2025}(x)) = 0.$

$(\cos 2x - \sin x)(1 + \cos^{2022}(2x) - \ldots - \sin^{2022} x +$
$+ 2024(\cos^{2024}(2x) - \ldots - \sin^{2024} x))$

2 скобка не имеет решений, т.к 2024 большое число и при x малом, чтобы приравнять скобки не будет решений.

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x = -1 \qquad \sin x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

3б

09247