

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
218	14.03.25	Лугин Н.А.	Л

Шифр 025-2-11-66

№ 1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

1. Раскроем квадраты:

$$f(a, b, c) = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

2. Частные производные:

$$2(7+a-b) - 2(9+c-a)$$

$$-2(7+a-b) + 2(2+b-c)$$

$$-2(2+b-c) + 2(9+c-a)$$

3. Приравняем к нулю: для нахождения критических точек:

$$2(7+a-b) - 2(9+c-a) = 0$$

$$-2(7+a-b) + 2(2+b-c) = 0$$

$$-2(2+b-c) + 2(9+c-a) = 0$$

4. Составим систему:

$$7+a-b-9-c+a=0 \Rightarrow 2a-b-c=2 \quad \checkmark$$

$$-7-a+b+2+b-c=0 \Rightarrow -a+2b-c=5 \quad \checkmark$$

$$-2-b+c+9+c-a=0 \Rightarrow -a-b+2c=-7$$

5. Решим систему:

$$\begin{cases} 2a-b-c=2 \\ -a+2b-c=5 \\ -a-b+2c=-7 \end{cases}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-66

$$c = 2a - b - 2$$

$$-a + 2b - (2a - b - 2) = 5$$

$$-a + 2b - 2a + b + 2 = 5$$

$$-3a + 3b + 2 = 5$$

$$-3a + 3b = 3$$

$$-a + b = 1$$

$$b = a + 1$$

$$-a - b + 2(2a - b - 2) = -7$$

$$-a - b + 4a - 2b - 4 = -7$$

$$3a - 3b - 4 = -7$$

$$3a - 3b = -3$$

$$a - b = -1$$

$$a = b - 1$$

Найдем a и b :

$$b = a + 1 \text{ и } a = b - 1$$

$$a = (a + 1) - 1 \Rightarrow a = a$$

$$b = a + 1$$

Подставим $b = a + 1$ и $c = a - 3$ в первое уравнение:

$$2a - (a + 1) - (a - 3) = 2 \Rightarrow 2a - a - 1 - a + 3 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

Конкретные значения:

$$b = a + 1$$

$$c = a - 3$$

Пусть: $a = 1$ $b = 1 + 1$ $c = 1 - 3$

$$\underline{a = 1} \quad \underline{b = 2} \quad \underline{c = -2}$$

не доказано, что
система имеет бесконечно
много решений; нет
увер. в том
Найдем c : это можно найти
или, решив систему

$$c = 2a - b - 2 \text{ и } b = a + 1$$

$$c = 2a - (a + 1) - 2 = 2a - a - 1 - 2 = a - 3$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-66

6. Подставим найденные значения:

$$f(1; 2; -2) = (7+1-2)^2 + (2+2-(-2))^2 + (9+(-2)-1)^2 =$$

$$= 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = \underline{108}$$

Ответ: 108

58

N2

Делим $P(x)$ на $Q(x)$:

$$\begin{array}{l} P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 \\ Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \end{array}$$

$$1. \frac{x^6}{x^4} = x^2$$

$$Q(x) \cdot x^2$$

$$x^2 \cdot Q(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2$$

$$P(x) - x^2 \cdot Q(x) = -x + 506$$

$$P(x) = Q(x) \cdot x^2 + (-x + 506)$$

$$2. P(x_1) = -x_1 + 506$$

$$3. \text{Сумма } P(x_i):$$

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \sum_{i=1}^4 (-x_i + 506) = -\sum_{i=1}^4 x_i$$

4. Решаем через теорему Виета $Q(x)$:

Для многочлена $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$:

$$\sum_{i=1}^4 x_i = -\frac{\text{коэф. при } x^3}{\text{коэф. при } x^4} = -\frac{1}{1} = -1$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-66

5. Подставим сумму корней в выражение:

$$-\sum_{i=1}^4 x_i + 2024 = -(-1) + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

$$\sqrt{3} \quad x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

1. Упростим без cos:

$$A = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

$$\text{Замена: } t = \sqrt{x^2+1}$$

$$x^2 = t^2 - 1$$

Подставим в A:

$$A = (t^2 - 1) - 6t + 11 = t^2 - 6t + 10$$

Функция $t^2 - 6t + 10$ имеет минимум в точке $t = 3$:

$$A_{\min} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$$

Т.к. $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1$, то $A \geq 1$

С учетом cos:

$\cos \in [-1; 1]$, исходное уравнение выполняется только

при:

$$A = 1 \cos \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \right) = 1$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-66

2. Решаем уравнение $A=1$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 10 = 0$$

Обратная замена:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t=3$$

Найдем x :

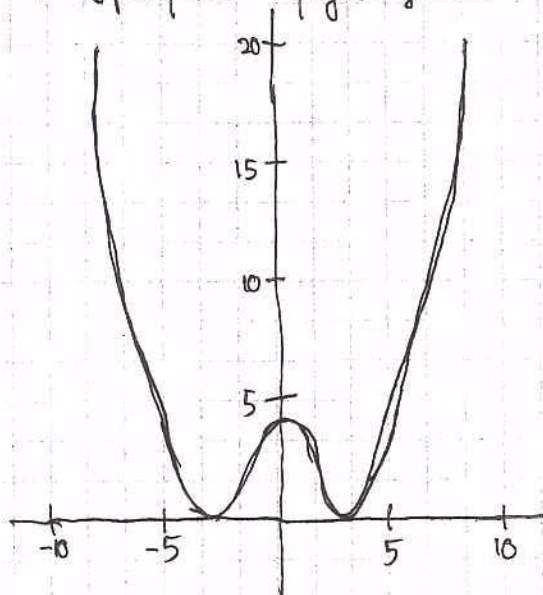
$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

$$x^2+1=9$$

$$x^2=8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

4. График функции:



3. Проверим $\cos = 1$

Аргумент $\cos$ должен быть кратен $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 2\pi n$$

Для $x = 2\sqrt{2}$

$$\frac{(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 4}{18} = \frac{8 + 4 - 4}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$\cos(\frac{4}{9})$ — не подходит

Для $x = -2\sqrt{2}$

$$\frac{(-2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) - 4}{18} = \frac{8 - 4 - 4}{18} = 0$$

$\cos(0)$ — подходит

Ответ: $x = -2\sqrt{2}$

$$N4 \quad x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

1. Проверим симметричный случай:

Предположим, что все $x_i = k$:

$$n \cdot k^{n-1} = k^n$$

$$k = n$$

При $x_i = n$:

$(n - n + 1)^n = 1 \neq 1$ Равенство достигается, что указывает на возможный минимум.

2. Применим неравенство АМ-ГМ:

$$\frac{x_1 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

Подставим $x_1^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 \dots x_n$:

$$\frac{x_1 \dots x_n}{n} \geq (x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$x_1 \dots x_n \geq n^n$$

3. Доказательство $x_i \geq n-1$:

Предположим, что $x_j < n-1$ для некоторого j . Тогда $x_j - n + 1 < 0$, и произведение $\prod (x_i - n + 1)$ становится отрицательным или меньше 1, что противоречит условию. Следовательно, все $x_i \geq n-1$.

4. Замена переменных:

Введем ~~из~~ $y_i = x_i - n + 1 \geq 0$. Тогда неравенство принимает вид:

$$y_1 y_2 \dots y_n \geq 1$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-11-66

Исходное условие преобразуется к:

$$\sum_{i=1}^n (y_i + n - 1)^{n-1} \geq \prod_{i=1}^n (y_i + n - 1)$$

5. Анализ через неравенства:

Из условия $\prod (y_i + n - 1) \geq n^n$ и замени $y_i + n - 1 = x_i$.

Рассмотрим функцию $f(y) = \ln(y + n - 1)$.

$f(y)$ возрастает, следует, что минимум произведения $\prod y_i$, достигается при $y_i = 1$, что соответствует $x_i = n$.
Любое отклонение будет увеличивать произведение, сохраняя неравенство

$$\prod_{i=1}^n (x_i - n + 1) \geq 1$$

Равенство достигается при $x_i = n$

25

15 Минимальный угол между плоскостями α и $\beta = 90^\circ$.

~~Так как~~ Иначе плоскости будут пересекаться.

25