

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
		Емелин	Емелин
Шифр			148803

Задача 3

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \Sigma \\ 3 & 3 & 7 & - & - & & 13 \end{array}$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

$$(x^2 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x^2+1} + 9) + 1 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 2 - 2}{18} = 0$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + 1 - \cos \frac{x(x-5)}{18}$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + 1 - \cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) + \sqrt{2}(x-\sqrt{2})}{18} = 0$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 - \cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = -1$$

В полученном уравнении очевидно слагаемые:

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \geq 0$$

$$-1 \leq \cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} \leq 1$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 = 0$, тогда, исходя из полученного уравнения, получаем, что $\cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = 1$.

2) $(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 > 0$

Тогда: $(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 = \cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} - 1 > 0$

Получаем, что $\cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} > 1$ - неверно при любых x .

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 3 = 0 & (1) \\ \cos \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = 1 & (2) \end{cases}$$

(1): $(\sqrt{x^2+1})^2 = 3^2$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$x^2 + 1 \geq 0$ - верно для любого x .

(2): $\frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

13393

$$n=0; \quad \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$n=-1; \quad \frac{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}{18} = -2\pi \quad / \cdot 18$$

$$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = -36\pi$$

$$x^2 + \sqrt{2}x - 4 + 36\pi = 0$$

$$D = 2 - 4(36\pi - 4) = 2 + 16 - 144\pi = 18 - 144\pi < 0 \quad (\text{корней нет})$$

При $n < -1$ ($n \in \mathbb{Z}$) с уменьшением n уменьшается D , поэтому решений не будет.

$$n=1; \quad x^2 + \sqrt{2}x - 4 - 36\pi = 0$$

$$D = 2 - 4(-4 - 36\pi) = 18 + 144\pi > 0$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2+16\pi}}{2} > \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > -2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2+16\pi}}{2} < \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

Поскольку функция $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4 - 36\pi n$

(при $n \in \mathbb{Z}; n \rightarrow +$) является квадратичной, график — парабола с ветвями вверх, с увеличением n больший из корней уравнения

$x^2 + \sqrt{2}x - 4 - 36\pi n = 0$ будет расти, меньший из корней — уменьшаться, из чего следует, что

в этом случае $x = \pm 2\sqrt{2}$ не будет являться

нулями функции $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4 - 36\pi n$, и

полученная система не будет иметь решений.

Значит, решениями системы и равносильного

ей исходного уравнения является $x = -2\sqrt{2}$.

Ответ: $x = -2\sqrt{2}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2.

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \quad \text{Тогда полагаем, что}$$

$$P(x) = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

Поскольку x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$, то

$$Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0 \quad \text{Значит,}$$

$$P(x_1) = x_1^2 \cdot 0 - x_1 + 506 = 506 - x_1$$

$$P(x_2) = 506 - x_2$$

$$P(x_3) = 506 - x_3$$

$$P(x_4) = 506 - x_4$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x_1) = 506 - x_1 \\ P(x_2) = 506 - x_2 \\ P(x_3) = 506 - x_3 \\ P(x_4) = 506 - x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) =$$

$$= 4 \cdot 506 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 =$$

$$= 2024 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) +$$

еще?

Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим выражение: $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \geq 0$
(т.к. сумма трёх квадратов).

Пусть наименьшее значение выражения равно нулю.

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7+a-b=0 \\ 2+b-c=0 \\ 9+c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+7 \\ c=b+2 \\ a=c+9 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получаем:

$$a+b+c = a+b+c+18$$

Система не имеет решений. $0 \neq 18$

Значит, $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 > 0$.

Преобразуем выражение:

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + 2(7+a-b) \cdot (2+b-c) -$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\begin{aligned}
 & - 2(7+a-b)(2+b-c) + (9+c-a)^2 = ((7+a-b) + (2+b-c))^2 + \\
 & + (9+c-a)^2 - 2(7+a-b)(2+b-c) = (9+a-c)^2 + \\
 & + (9+c-a)^2 - 2(7+a-b)(2+b-c) = (9+a-c)^2 + (9+c-a)^2 + \\
 & + 2(9+a-c)(9+c-a) - 2(9+a-c)(9+c-a) - 2(7+a-b)(2+b-c) = \\
 & = (9+a-c+9+c-a)^2 - 2(9+(a-c))(9-(a-c)) - 2(7+a-b) \cdot \\
 & \cdot (2+b-c) = 18^2 - 2(9^2 - (a-c)^2) - 2(7+a-b)(2+b-c) = \\
 & = 324 - 162 + 2(a-c)^2 - 2(7+a-b)(2+b-c) = \\
 & = 162 + 2(a-c)^2 - 2(7+a-b)(2+b-c) = \\
 & = 2 \cdot (81 + (a-c)^2 - (7+a-b)(2+b-c)).
 \end{aligned}$$

Значит, исконое выражение примет
минимальное значение из всех возможных
(при $a, b, c \in \mathbb{R}$) при:

$$\begin{cases} (a-c)^2 = 0 \\ (7+a-b)(2+b-c) = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ (7+a-b)(2+b-a) = 81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 + 7b - 7a + 2a + ab - a^2 - 2b - b^2 + ab = 81$$

$$5b - 5a + 2ab - a^2 - b^2 + 14 - 81 = 0$$

$$5(b-a) - (a^2 - 2ab + b^2) - 67 = 0$$

$$5(b-a) - (b-a)^2 - 67 = 0$$

Замена: $b-a = t$

$$5t - t^2 - 67 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$t^2 - 5t + 67 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 67 < 0 \quad (\text{решений нет}).$$