

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
265 (двадцать шесть)	18.03.24	Лугиня И. В.	

делитель

Задача 1.

Решение: число называется составным, если его можно представить в виде произведения натуральных множителей — целых чисел, модуль которых отличен от единицы и самого числа. Необходимо доказать, что число $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$

можно разложить на целые множители, модуль которых не равен единице и самому числу.

$$\begin{aligned}
 3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} &= 3^{4046} + 2 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} \\
 &= 3^{2023} \left(3^{2023} + 2 \cdot 5^{1012} \right) - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} \\
 &= 3^{2023} \left(3^{2023} + 5^{1012} \right) - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} \\
 &= \left(3^{2023} + 5^{1012} \right)^2 - 3^{2023} \cdot 5^{1012} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} \\
 &= \left(3^{2023} + 5^{1012} \right)^2 - 4 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} \\
 &= \left(3^{2023} + 5^{1012} - 4 \cdot 5^{1012} \right) \cdot \left(3^{2023} + 5^{1012} + 4 \cdot 5^{1012} \right) \\
 &= \left(3^{2023} - 3 \cdot 5^{1012} \right) \cdot \left(3^{2023} + 5^{1012} + 4 \cdot 5^{1012} \right)
 \end{aligned}$$

Так как многочлен $3^{2023} + 5^{1012} - 4 \cdot 5^{1012}$ и многочлен $3^{2023} + 5^{1012} + 4 \cdot 5^{1012}$ (каждый из них) представляют собой сумму целых чисел, то оба многочлена являются целыми

числами (отличными по модулю от единицы и исходного числа), а значит их произведение даёт составное число (исходное число). Ч. т. д.

Задача 2. $t^4 - 2\sqrt{13}t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

Решение:

Обозначим в уравнении $K = \sqrt{13}$, тогда:

$$t^4 - 2Kt^2 + t + K^2 - K = 0$$

Решим уравнение относительно K , тогда:

$$K - (2t^2 + 1)K + t^4 + t = 0$$

В уравнении: $a = 1$, $b = -(2t^2 + 1)$, $c = t^4 + t$

$$D = b^2 - 4ac = (- (2t^2 + 1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^4 + t) = 4t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^4 - 4t = 4t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)^2$$

$$K = \frac{2t^2 + 1 + |2t - 1|}{2} \quad \text{или} \quad K = \frac{2t^2 + 1 - |2t - 1|}{2}$$

1 случай) $K = \frac{2t^2 + 1 + |2t - 1|}{2} \quad (K = \sqrt{13})$

$$2t^2 + 1 + |2t - 1| = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ 2t^2 + 2t - 2\sqrt{13} = 0 \quad (1) \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{13}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ 2t^2 - 2t + 2 - 2\sqrt{13} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t = \frac{1 + \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2} \end{cases}$$

$$(1): \quad t^2 + t - \sqrt{13} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{13} = 1 + 4\sqrt{13}$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{13}}}{2}$$

$$(2): \quad t^2 - t + 1 - \sqrt{13} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{13} - 1) =$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{13} - 1) =$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{13} - 1) =$$

$$= 4\sqrt{13} - 3$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$$

Получены: $t = \frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2}$

или $t = \frac{1 - \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$

2 случай) $K = \frac{2t^2 + 1 - |2t - 1|}{2} \quad (K = \sqrt{13})$

$$2t^2 + 1 - |2t - 1| = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ 2t^2 - 2t - 2\sqrt{13} + 2 = 0 \quad (1) \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ t = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ 2t^2 + 2t - 2\sqrt{13} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2} \end{cases}$$

$$(1): t^2 - t + 1 - \sqrt{13} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{13} - 1) = 4\sqrt{13} - 3$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$$

$$(2): t^2 + t - \sqrt{13} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{13} = 4\sqrt{13} + 1$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2}$$

Получаем: $t = \frac{1 + \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$ или $t = \frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2}$

Ответами исходного уравнения будут корни из первого и из второго случаев

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{4\sqrt{13} - 3}}{2}$; $\frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2}$; $\frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{13} + 1}}{2}$

Задача 3. $\begin{matrix} (100-x)\% \text{ серебра} \\ m_1 \\ x\% \text{ золота} \end{matrix}$, $\begin{matrix} (100-y)\% \text{ серебра} \\ m_2 \\ y\% \text{ золота} \end{matrix}$, $\begin{matrix} 100\% \text{ серебра} \\ m_3 \\ 0\% \text{ золота} \end{matrix}$

Решение:
Обозначим: m_1 - масса сплава, в котором $x\%$ золота,
 m_2 - масса сплава, в котором $y\%$ золота ($x \neq y$),
 m_3 - масса бруска серебра.

При сплавлении двух сплавов получаем: $xm_1 + ym_2 = 30(m_1 + m_2)$

При сплавлении любого сплава с бруском серебра:

$$xm_1 = 20(m_1 + m_3); \quad ym_2 = 20(m_2 + m_3) \quad \text{Получаем систему:}$$

$$\begin{cases} xm_1 + ym_2 = 30(m_1 + m_2) & (1) \\ xm_1 = 20(m_1 + m_3) & (2) \\ ym_2 = 20(m_2 + m_3) & (3) \end{cases}$$

При сложении (2) и (3) получаем:

$$\begin{cases} xm_1 + ym_2 = 30(m_1 + m_2) \\ xm_1 + ym_2 = 20m_1 + 20m_3 + 20m_2 + 20m_3 \end{cases}$$

Получаем: $30m_1 + 30m_2 = 20m_1 + 20m_2 + 40m_3$
 $10(m_1 + m_2) = 40m_3 \quad : 10$
 $m_1 + m_2 = 4m_3 \quad (4)$

При сложении уравнений (1), (2) и (3) получаем:

$$\begin{aligned} 2xm_1 + 2ym_2 &= 50m_1 + 50m_2 + 40m_3 \quad : 2 \\ xm_1 + ym_2 &= 25(m_1 + m_2) + 20m_3 \quad \text{но } m_3 = \frac{m_1 + m_2}{4} \\ \text{из уравнения (1) получаем } xm_1 + ym_2 &= 30(m_1 + m_2) \end{aligned}$$

$30(m_1 + m_2) = xm_1 + ym_2$. По условию задачи необходимо

найти число K в уравнении: $xm_1 + ym_2 = K(m_1 + m_2 + m_3)$

Но $m_3 = \frac{m_1 + m_2}{4} \Rightarrow xm_1 + ym_2 = \frac{5}{4}K(m_1 + m_2)$

Получаем: $xm_1 + ym_2 = 30(m_1 + m_2)$

$xm_1 + ym_2 = \frac{5}{4}K(m_1 + m_2)$

где K — количество процентов золота при сплавлении трёх дрисков

$\Rightarrow 30 = \frac{5}{4}K \quad / : \frac{5}{4}$

$K = 24 (\%)$

Ответ: 24 %

Задача 4. Дано: $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$, $b^2 - a^2 > b - a$

Доказать: $b^3 - a^3 > b - a$

Доказательство:

1) $b^2 - a^2 > b - a$

$(b-a)(a+b) - 1(b-a) > 0$

$(b-a)(a+b-1) > 0$

$a < \frac{1}{2}$

$b < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \text{(по свойствам неравенств)} \\ a+b < 1 \\ a+b-1 < 0 \end{cases}$

Произведение равно положительному числу, один из его множителей отрицателен $\Rightarrow$ второй из них тоже отрицателен:

$b-a < 0 \Leftrightarrow a > b$

2) Необходимо доказать, что $b^3 - a^3 > b - a$

$(b-a)(a^2 + ab + b^2) - 1(b-a) > 0$

$(b-a)(a^2 + ab + b^2 - 1) > 0$

Но $b-a < 0 \Rightarrow$ докажем, что $a^2 + ab + b^2 - 1 < 0$

$a^2 + ab + b^2 < 1$

3) $a < \frac{1}{2}$. Т.к. $a > 0 \Rightarrow a^2 < \frac{1}{4}$ (1)

$b < \frac{1}{2}$. Т.к. $b > 0 \Rightarrow b^2 < \frac{1}{4}$ (2)

$a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$. Т.к. $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow ab < \frac{1}{4}$ (по свойствам неравенств) (3)

Сложим неравенства (1), (2), (3). Знак сохраняется:

$a^2 + ab + b^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, но $\frac{3}{4} < 1$

Следовательно, $a^2 + ab + b^2 < \frac{3}{4} < 1$

$$a^2 + ab + b^2 < 1$$

$$a^2 + ab + b - 1 < 0$$

$$\cdot (b-a) < 0$$

(знак меняется на
противоположный)

~~$$(b-a)(a^2 + ab + b - 1) > b - a$$~~

Перемножим: $(b-a)(a^2 + ab + b^2 - 1) > 0$

$$(b-a)(a^2 + ab + b^2) - 1(b-a) > 0$$

$$b^3 - a^3 > b - a$$

68

Ч.т.д.