

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
14	14.03	Хмелев	
Шифр			12109

$$1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \Sigma$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$$

Задача 4

1) Предлагается преобразовать выражение $x_1^4 + x_2^4$ для удобного использования теоремы Виета.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 x_2)^2$$

2) Воспользуемся теоремой Виета для уравнения $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ ($p \neq 0$).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \cdot 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$$

3) подставим значение в неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, ставшее после преобразования в 1 равенство

$$(x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 x_2)^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$(-p)^4 - 4\left(-\frac{1}{2p^2}\right)(-p)^2 + 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{4 \cdot p^2}{2p^2} + \frac{\sqrt{2}}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{4p^2}{2p^2} + \frac{2 \cdot 1}{4p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \quad | \cdot 2p^4 \quad (p^4 \text{ степень четная, значит } 2p^4 > 0 \text{ знак не меняется})$$

$$\frac{2p^8 + 1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$2p^8 + 1 \geq 2\sqrt{2}p^4$$

$$\frac{2p^8 + 1}{2\sqrt{2}p^4} \geq 0$$

$$2p^8 - 2\sqrt{2}p^4 \geq -1 \Rightarrow p^8 - p^4\sqrt{2} \geq -0,5$$

4) подставим любое значение p ($p \neq 0$).

$$2(-3)^8 - 2\sqrt{2}(-3)^4 \geq -1$$

$$2 \cdot 3^8 - 2\sqrt{2} \cdot 3^4 \geq -1$$

(т.к. степени четные, то все числа становятся положительными)

$$2(3^8 - \sqrt{2} \cdot 3^4) \geq -1$$

$$3^8 - 3^4\sqrt{2} \geq -0,5$$

$$3^4(3^4 - \sqrt{2}) \geq -0,5$$

(тут мы можем увидеть, что $3^4 > \sqrt{2}$, значит число будет положительным)

Опираясь на 3.1 мы можем подобрать наименьшее число для проверки. Возьмем 0, чтобы исключить данный вариант т.к. 0 явл. наименьшим натуральным числом.

$$0^8 - 0^4\sqrt{2} \geq -0,5$$

$$0 \geq -0,5$$

$$1^8 - 1^4\sqrt{2} \geq -0,5$$

$$1 - 1,4 \geq -0,5 \Rightarrow -0,4 \geq -0,5$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Шифр

из этого следует, что насколько маленькое бы число мы не брали, то оно будет ~~меньше~~ больше $-0,5$.
Еще мы можем принять $p^2 - p^4 \sqrt{2}$ за функцию $y = p^2 - p^4 \sqrt{2}$, тогда
 $p_0 = -\frac{6}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; тогда $y_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \sqrt{2} = \frac{2^2}{2^4} - \frac{2^2 \sqrt{2}}{2^4} =$
 $= \frac{2^2 - 2^2 \sqrt{2}}{2^4} = \frac{2^2(1 - \sqrt{2})}{2^4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2^2} = \frac{1 - 1,414}{4} = \frac{1 - 1,414}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1,414}{4} =$
 $= 0,0625 - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,0625 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,0625 - \frac{1}{1,414} = 0,0625 - 0,707 =$
 $= -0,6445$. ~~$y_0 \approx 0$~~

$y_0 = -0,6445$, поэтому $p^2 - p^4 \sqrt{2} > -0,6445$. Это значит, что $p^2 - p^4 \sqrt{2}$ в любом случае больше чем $-0,5$.

ч.т.д.

ЗАДАНИЕ 2

Представим 21 как сумму трех квадратов.

Но 21 встречаются 16; 9; 4; 1

$16 + 9 + 4 = 29 (-)$	$1 + 9 + 9 = 19 (-)$
$16 + 9 + 1 = 26 (-)$	$1 + 4 + 4 = 9 (-)$
$16 + 4 + 1 = 21 (+)$	$4 + 1 + 1 = 6 (-)$
$9 + 4 + 1 = 14 (-)$	$4 + 9 + 9 = 22 (-)$
$16 + 4 + 4 = 24 (-)$	$9 + 4 + 4 = 17 (-)$
$16 + 1 + 1 = 18 (-)$	$9 + 1 + 1 = 11 (-)$
$16 + 9 + 9 = 34 (-)$	$9 + 9 + 9 = 27 (-)$

Единственный подходящий вариант — $16 + 4 + 1$

1 — наименьшее число и подходит только под значение a^2 , тогда b^2 и $c^2 = 16$ и 4 , то есть $a = 1$; $b + c = 4 + 2 = 6$
 $a + b + c = 7$, значит минимальные значения совпадают, при этом противоречий не наблюдается. $a \geq 1$; $b \geq 2$; $c \geq 3$, а в ~~уравнении~~ неравенстве $a = 1$; $b = 2$; $c = 4$.

ч.т.д.

ЗАДАНИЕ 1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2xy = \frac{10}{3}xy \quad \text{и} \quad x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = \frac{10}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{10}{3}xy - 2xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{10}{3}xy + 2xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{10xy}{3} - \frac{6xy}{3} \quad \checkmark$$

$$(x+y)^2 = \frac{10xy}{3} + \frac{6xy}{3} \quad \checkmark$$

$$(x-y)^2 = \frac{4xy}{3}$$

$$(x+y)^2 = \frac{16xy}{3}$$

$$x-y = \sqrt{\frac{4xy}{3}} \quad \checkmark$$

$$x+y = \sqrt{\frac{16xy}{3}}$$

$$\text{тогда } \frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{\frac{16xy}{3}}}{\sqrt{\frac{4xy}{3}}} = \sqrt{\frac{16xy}{3} : \frac{4xy}{3}} = \sqrt{\frac{16xy}{3} \cdot \frac{3}{4xy}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 16xy \cdot 3}{4xy \cdot 3}} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2. $\checkmark$

78