Шифр 07698

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	20.03	Корякова Е.Е.	[illegible]

№2

1) $0<x<\frac{1}{2}$ $\quad 0<y<\frac{1}{2}$

2) $y^2-x^2>y-x$

1	2	3	4	5	Σ
5	7	0	5	3	20

$y^2-x^2>y-x$ ~~$\Leftrightarrow$~~

$(y-x)(y+x-1)>0$, но $y+x-1<0 \Rightarrow y-x<0$

$y^3-x^3 \vee y-x$

$(y-x)(y^2+xy+x^2-1)\vee 0$

$y^2+xy+x^2<\frac{3}{4} \Rightarrow (x^2+xy+y^2-1)<0$, но $y-x<0 \Rightarrow$

~~$\Leftrightarrow$ $y^3-x^3<0$~~

$\Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0 \Rightarrow y^3-x^3>y-x$ чтд.

+

№4

$\cos(2x)+\cos^{2023}(2x)+2024\cos^{2025}(2x)=\sin(x)+\sin^{2023}(x)+$

$+2024\sin^{2025}(x)$

Рассмотрим ф-ю $f(t)=t+t^{2023}+2024t^{2025}$, она - монотонно возрастающая $\Rightarrow f(\cos(2x))=f(\sin(x)) \Leftrightarrow \cos 2x=\sin x$ Док-во?

$\cos 2x=\sin x$

$1-2\sin^2 x=\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

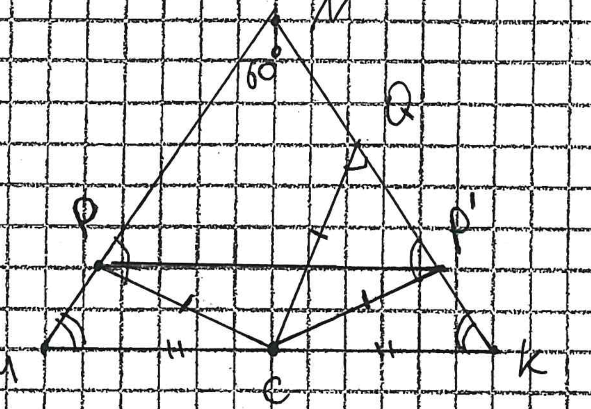
Место для скобы

Шифр 07698

№4

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

№5



Выберем точку из P, Q лежащую дальше от N ~~и проведем из нее~~ (без ограничения общности эта точка P) и проведем из нее прямую $PP' \parallel MK$.

$\boxed{\text{Пусть } C \text{ - середина } MK}$

В $\triangle MPC$ и $\triangle KP'C$:

$MC = CK$ (по у-ю)

$MP = P'K$ (т.к. $PP' \parallel MK$)

$\angle PMC = \angle P'KC = 60°$ (по у-ю)

$\Leftrightarrow$ Они равны $\Rightarrow CP = CP'$

$\angle CPN = \angle CP'Q$ (из симметрии)

$\angle CQP' = \angle CP'Q$ (из р/б $\triangle CQP'$) $\Leftrightarrow$ 4х угольник $PCQN$ — вписанный $\Leftrightarrow \angle PNQ + \angle PCQ = 180° \Leftrightarrow \angle PCQ = 120°$.

Видно, что все утверждения равносильны $\Rightarrow$ для того, чтобы $CP = CQ$ необходимо и достаточно, чтоб $\angle PCQ = 120°$.

Теперь найдем какие значения может принимать PQ

Для этого обозначим $\angle MPC = \alpha \Rightarrow \angle QCK = 60 - \alpha$.

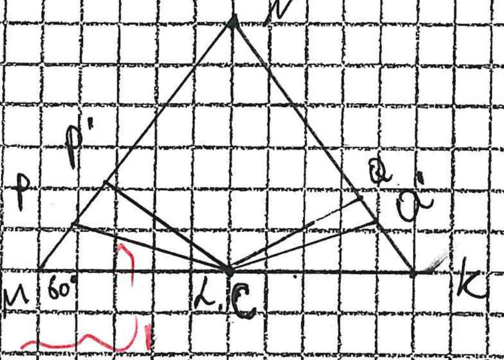
Видно что при $\alpha > 30°$ ситуация будет симметрична

Место для скобы

Шифр 07698

№5

По этому будем рассматривать только $\lambda < 30^\circ$.



Пусть $\angle MCP = \lambda$ $\angle MCP'$

тогда $\angle P'PC = \lambda + 60^\circ$, $\angle MP'C = 120^\circ - \lambda$,

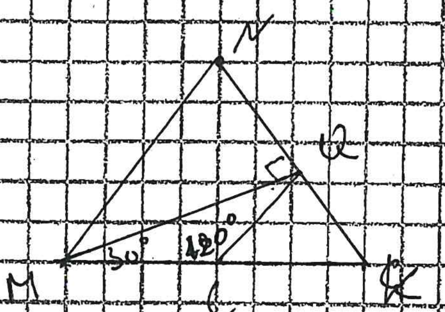
тогда при $\lambda < 30^\circ$ получается, что $\angle P'PC < \angle MP'C$, но тогда из нер-ва треугольника $PC > CP'$,

а из подобия $\triangle PCQ$ и $\triangle P'CQ'$ $PQ > P'Q'$ =>

=> при увеличении угла MCP' PQ монотонно убывает.

Получается, остается рассмотреть 2 ~~случая~~ граничных случая

I) $P = M$

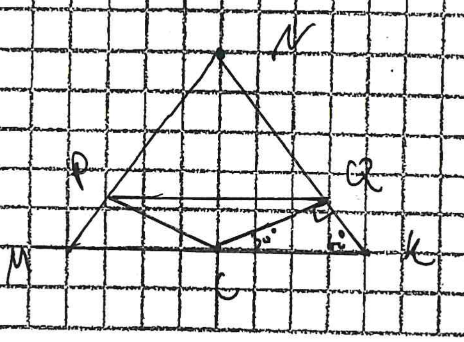


Пусть $MN = NK = MK = a$, тогда $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3}$

II) $\lambda = 30^\circ$ при $\lambda = 30^\circ$ $PQ \parallel MK$, по этому это значение мин не экстремальное

$CQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CK = \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$



тогда по т. косинусов

$PQ^2 = CQ^2 + CP^2 - 2CQ \cdot CP \cos 120^\circ$

$PQ^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{16} = \frac{(2-\sqrt{3})3}{16}$

~~$PQ = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})3}{16}}$~~

Место для скобы

Шифр 7698

№ 5

$$PQ^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$PQ = \sqrt[2]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}}$$

Ответ: $PQ \in \left[\sqrt[4]{3}; \sqrt[2]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}}\right)$

~~+~~

№ 1

Пусть мы нашли такое число $X = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, что оно подходит.

Предположим, что $a_4 < 9$, тогда рассмотрим число на 1 больше.

~~$a_1 a_2 a_3$~~ ~~$a_1 + a_2$~~

$$\frac{1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \vee \frac{1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 + 1}{\cancel{1000a_1 + 100a_2} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 1}$$

$1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 \vee a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$999a_1 + 99a_2 + 9a_3 > 0$, получаем, что тогда X - не оптимально $\Rightarrow a_4 = 9$. ? почему

если также рассмотреть $a_3 < 9$ можно получить

$1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 \vee 10(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

$$990a_1 + 90a_2 - 9a_4 > 0, \text{ (т.к. } a_1 \geq 1) \Rightarrow a_3 = 9$$

при $a_2 < 9$ получим

$$900a_1 - 90a_2 - 99a_3 < 0 \quad \text{при } a_4 = 9,\ a_3 = 9,\ a_1 = 1 \Rightarrow$$

при таких a_4, a_3, a_1 число ~~будет~~ станет менее оптимальным значит, чтоб увеличить оптимальность типа нужно, ~~чтоб~~

или взять $a_1>1$

уменьшить a_3, a_4 и увеличить a_2, очевидно, что уменьшать

числа a_3, a_4 не имеет смысла, далее будет рассмотрен

пример с увеличением a_1, из которого также станет

понятно, что это не имеет смысла $\Rightarrow$ $a_3=0$

Допустим, что $a_1>1$, тогда сравним числа

$$\frac{1000a_1+100a_2+10a_3+a_4}{a_1+a_2+a_3+a_4} \vee \frac{1000a_1+100a_2+10a_3+a_4-1000}{a_1+a_2+a_3+a_4-1}$$

$$-1000a_1-100a_2-10a_3-a_4 \vee -1000(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

$$\cancel{900a_1+90a_2+\ldots}$$

$900a_2+990a_3+999a_4 > 0$ $\Rightarrow$ всегда есть смысл уменьшать a_1 $\Rightarrow$ $a_1=1$

Ответ: такое число 1099