

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
205	10.03.25	Генерал	Г
Шифр			918452

Задача 11:

Заметим, что $\sqrt{(7+a-b)^2 + (1+b-c)^2 + (3+c-a)^2} \geq \frac{((7+a-b) + (1+b-c) + (3+c-a))}{3}$

(неравенство между средними) всегда верно:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Итого $\sqrt{\frac{(7+a-b)^2 + (1+b-c)^2 + (3+c-a)^2}{3}} \geq \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

$\Rightarrow (7+a-b)^2 + (1+b-c)^2 + (3+c-a)^2 \geq 3 \cdot 6\frac{1}{3} = 108$

Пример на 108: $a=4; b=1; c=0$, тогда:

$$(7+4-1)^2 + (1+1-0)^2 + (3+0-4)^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 108$$

Ответ: 108 ✓

60

Задача 12:

$$P(x) = x^4(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506 \Rightarrow P(x) = x^8 Q(x) - x + 506$$

Заметим, что $Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$, тогда:

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 506 \cdot 4 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2024 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Заметим, что если раскрыть скобки слева, то коэффициенты перед x^3 будут $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4$, а м.к. в $Q(x)$ перед x^2 — $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1 \Rightarrow$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 2024 - (-1) = 2025$$

Ответ: 2025 ✓

60

1	2	3	4	5
6	0	7	7	0

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918452

Задача 3:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 9}{18} = 0$$

$$x^2 + 1 - 6\sqrt{x^2+1} + 9 + 1 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 9}{18} = 0$$

$$\underbrace{(\sqrt{x^2+1} - 3)^2}_{\geq 0} + 1 - \underbrace{\cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 9}{18}}_{\leq 1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3 \\ \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 9}{18} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{при } x = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \frac{8 + 9 - 9}{18} = \cos \frac{8}{18} \neq 1$$

$$\text{при } x = -2\sqrt{2}$$

$$\cos \frac{8 - 9 - 9}{18} = \cos \frac{0}{18} = 1 \Rightarrow \text{корень}$$

$$\text{Ответ: } -2\sqrt{2}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 4:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq (n-1) x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_n^{n-1}$$

(Переходим к средним арифметическим и геометрическим) где

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1} \geq (n-1) x_1 x_2 \dots x_{n-1}$$

Аналогично где x_{n-1}

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_{n-2}^{n-1} + x_n^{n-1} \geq (n-1) x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + x_{n-1}^{n-1}$$

выделяем пока где все x_i , где x_i (это все
уже было от 1 до n).

$$\text{т.к. } x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n, \text{ то}$$

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq (n-1) x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_n^{n-1}$$

$$x_1 x_2 \dots x_n - x_n^{n-1}$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n - x_n^{n-1}) \geq x_n^{n-1}$$

аналогично где все x_i

$$x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n (x_{n-1} - x_{n-1}^{n-1}) \geq x_{n-1}^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_2 x_3 \dots x_n (x_1 - x_1^{n-1}) \geq x_1^{n-1}$$

т.к. все числа положительные, то можно разделить
на все перемножить - тогда получим:

$$x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1} (x_1 - x_1^{n-1}) \dots (x_n - x_n^{n-1}) \geq x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}$$

сокращая обе стороны на $x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}$ получим

$$(x_1 - x_1^{n-1}) (x_2 - x_2^{n-1}) \dots (x_n - x_n^{n-1}) \geq 1$$

т.н.г.

75