Место для скобы

ОР.МО 11-23-М282

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЛОСЕВ
	Имя	ЯРОСЛАВ
	Отчество	АНДРЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 02; Месяц: 08; Год: 2005
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Иркутская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Братск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	МБОУ „Гимназия №1 им. А.А. Иноземцева"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр ОРМО11-23-М282

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19	26.03	Коржикова Е.Е.	

Задание №1.

Заметим, что $2x^2; 2x^2z^2; z^2; 7y^2 \geq 0$; $33>0$.

А так как сумма $=0 \Rightarrow -42y<0 \Rightarrow y>0$.

Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y(y-6)+33=0.$$

Все слагаемые (кроме $7y(y-6)$) больше или $=0$. А $33>0$

$\Rightarrow 7y(y-6)<0$. Зная, что $y>0 \Rightarrow y-6<0 \Rightarrow y<6$

$\Rightarrow y\in(0;6)$.

1. Рассмотрим $y=1$ и $y=5$. Подставив в ур. получим:

$2x^2+2x^2z^2+z^2-2=0$. или $2x^2(1+z^2)+z^2=0+2=2$

Так как x и z - целые $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2(1+z^2)=0 \\ z^2=2 \end{cases} \Rightarrow z\text{-не целое} \\ \begin{cases} 2x^2(1+z^2)=1 \\ z^2=1 \end{cases} \Rightarrow z=\pm1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x\text{ не целое} \\ \begin{cases} 2x^2(1+z^2)=2 \\ z^2=0 \end{cases} \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=\pm1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow y=1$ или 5; $z=0$; $x=\pm1$

1	2	3	4	5	Σ
7	2	2	7	1	19

2. Рассмотрим $y=2$ или $y=4$. Тогда

$2x^2(1+z^2)+z^2=23$ $\quad 2x^2(1+z^2)$-четное, т.к. есть 2

$\Rightarrow z^2$-нечетное $\Rightarrow z$-нечетное

При $z=\pm1 \Rightarrow x^2(1+1)=22 \Rightarrow x=\pm\sqrt{11}$-нецелое

При $z=\pm3$ $\quad x^2\cdot10=7 \Rightarrow x$-нецелое

При $z=\pm5$ $\quad z^2=25>23 \Rightarrow$ р. нет

$\Rightarrow y\neq2$ и $y\neq4$

3. При $y=3$: $\quad 2x^2(1+z^2)+z^2=30$; $\quad 2x^2(1+z^2)$-четное $\Rightarrow z^2$-четное $\Rightarrow z$-четное или 0

При $z=0 \Rightarrow x^2=15 \Rightarrow x$-нецелое

При $z=\pm2 \Rightarrow x^2\cdot5=13 \Rightarrow x$-нецелое

При $z=\pm4$ $\quad x^2\cdot17=7 \Rightarrow x$-нецелое

При $z=\pm6$ $\quad z^2=36 \Rightarrow z^2>30 \Rightarrow$ таких x нет.

$\Rightarrow y\neq3$

Место для скобы

Шифр ОРМО11-23-М 282

Продолжение 1.

А это всевозможные варианты целого y.

$\Rightarrow$ Ответ: $(1;1;0); (1;5;0); (-1;1;0); (-1;5;0)$. $(x;y;z)$

Задание 4.

Для $a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ по теореме Виетта справедливо:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b'}{a'}$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c'}{a'}$$ где $x_1;x_2;x_3$ - корни многочлена
$$x_1x_2x_3=-\frac{d'}{a'}$$

$\Rightarrow$ выражение $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$ равносильно:

$(x_1+x_2+x_3)\cdot\left(\frac{x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3}{x_1x_2x_3}\right)$. Или же, пользуясь т. Виетта:

$$-\frac{b'}{a'}\cdot\frac{c'}{a'}\cdot\left(-\frac{a'}{d'}\right)=\frac{b'\cdot c'}{a'\cdot d'}.$$

В нашем случае (ax^3-ax^2+bx+b) имеем:

$a'=a;\ b'=-a;\ c'=b;\ d'=b \Rightarrow \frac{b'\cdot c'}{a'\cdot d'}=\frac{-\cancel{a}\cdot b}{\cancel{a}\cdot b}=-1$

$\Rightarrow (x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-\frac{a\cdot b}{a\cdot b}=-1$ ч.т.д.

Вывод: используя теорему Виетта получаем
$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-\frac{a\cdot b}{a\cdot b}=-1$ ч.т.д.

Задание 3.

$\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq 1{,}5\,|\cdot 2.$

$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3$. Пойдем от противного.

Пусть $2\frac{a}{b+c}+2\frac{b}{a+c}+2\frac{c}{a+b}<3$.

Разобьем слагаемые на пары: $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}\right)$; $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{b+a}\right)$; $\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)$.

Рассмотрим 1-ю пару:

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{a^2+ac+bc+b^2}{c^2+ac+bc+ab}$ Чтобы сумма была $<3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+ac+bc+b^2<c^2+ac+bc+ab \Rightarrow c^2>a^2-ab+b^2$.

Аналогично выведем, что $a^2>c^2-bc+b^2$. Сложив эти неравенства, получим $a^2+c^2>a^2+c^2+2b^2-b(a+c)\Rightarrow a+c>2b$.

Аналогично $a+b>2c$; $b+c>2a \Rightarrow$ сложив эти 3 неравенства получим: $2a+2b+2c>2a+2b+2c$, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow 2\frac{a}{b+c}+2\frac{b}{a+c}+2\frac{c}{a+b}\geq 3 \Rightarrow$ ~~исх.~~ изначальное неравенство верно - ч.т.д.

Место для скобы

Продолжение 3. **Шифр** ОРМОII-23-М-282

мы получили, что $b+c>2a$.
Пусть $a\geq b\geq c$, не умоляя условий, получаем, сделав замену:

$$0{,}5+\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

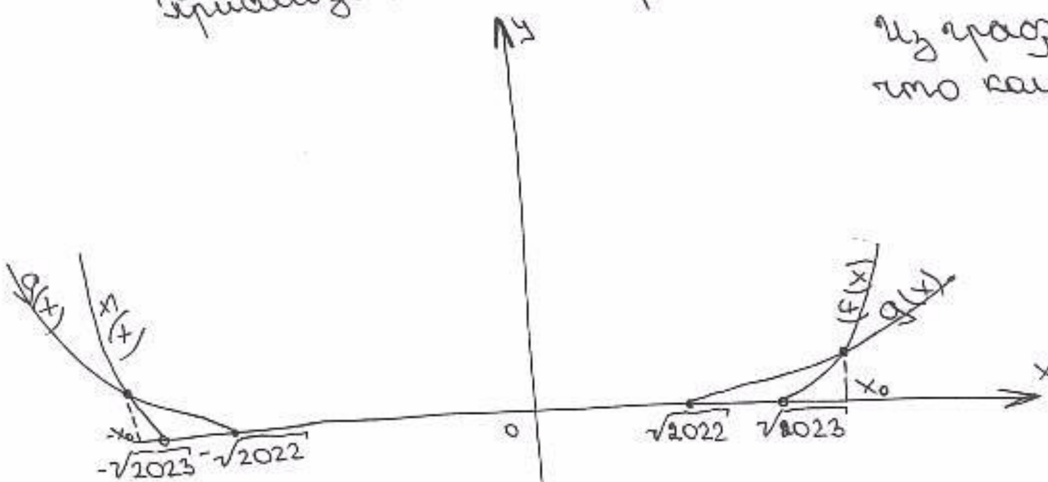
$$\Rightarrow 0{,}5+\frac{b+c}{2a}\leq 1{,}5 \Rightarrow \frac{b+c}{2a}\leq 1 \Rightarrow 2a\geq b+c.$$

Но мы ранее вывели, что $b+c>2a$ => ещё одно противоречие, ещё раз доказывающее, что исходное неравенство верно.

F

Задание №2.

$2^{\lg(x^2-2023)}=\lg 2^{x^2-2022}$. Пусть $f(x)=2^{\lg(x^2-2023)}$, а $g(x)=\lg 2^{x^2-2022}$.
Построим приблизительный вид графиков и найдем по нему кол-во точек x, при которых $f(x)=g(x)$.
Приблизительные графики:



Из графика видно, что кол-во корней - 2.

1. $f(x)=2^{\lg(x^2-2023)}$ - графиком будет 2 ветви параболы, выходящие из открытых точек $-\sqrt{2023}$ и $\sqrt{2023}$.
2. $g(x)=\lg 2^{x^2-2022}$ - графиком будут также 2 ветви параболы, но выходящие из закрытых $-\sqrt{2022}$ и $\sqrt{2022}$.

Таким образом, имеем 2 точки пересечения x_0 и $-x_0$, которые и являются корнями.

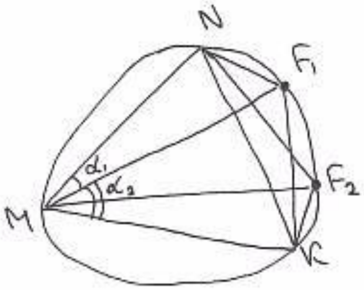
Ответ: 2 корня.

F

Место для скобы

Шифр OPM011 – 23 – M282

Задание №5.



Пользуясь теоремой о том, что = хорды отсекают = дуги имеем, что $\smile NK = \smile MK = \smile MN$, не содержащие M, N, K соответственно

$\Rightarrow$ осталось док-ть, что $FM^4+FN^4+FK^4=const$ независимо от $F_1 \in \smile NK$ (ведь если $F_3 \in \smile MK$, например, то будет такая же ситуация, если бы $F \smile NK$, но $MF=NF_3$; $NF=KF_3$ и $KF=MF_3$).

Из т. косинусов $NF_1^2=MF_1^2+MK^2-2MK\cdot MF\cdot\cos\alpha_1$; $KF_1^2=MF_1^2+MK^2-2MK\cdot MF\cdot\cos\alpha_2$; ведь $MN=MK=a$, тогда сумма $=2MF_1^2+2a^2-2a\cdot MF_1\cdot(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$. ; $\alpha_1+\alpha_2=60°$?

$\Rightarrow$ сумма $=2MF_1^2+2a^2-2a\cdot MF_1\cdot\cos 30\cdot\cos(2\alpha_1-30)$.

Аналогично для точки F_2 и получаем, что суммы = независимо от F – ч.т.д.

F