Место для скобы

Шифр 08501

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19б	23.03.24	Гендрина	

1	2	3	4	5
3	6	0	3	7

Задание 2

1) $x; y \in (0; \frac{1}{2})$

2) $y^2 - x^2 > y - x$

$(y-x)(y+x) - (y-x) > 0 \to y - x \neq 0$, т.к. $0(y+x) - 0 = 0 \Rightarrow x \neq y$ (1)

$(y-x)(y+x-1) > 0.$

Т.к. $y; x \in (0; \frac{1}{2})$, то $y - x \leq 0$. (2) Из усл (1), $y - x < 0$. Тогда

$y + x - 1 < 0$

$y + x < 1$ (3)

3) $y^3 - x^3 > y - x$

$(y-x)(x^2 + xy + y^2) - (y-x) > 0$

$(y-x)(x^2 + xy + y^2 - 1) > 0$

Из усл. (2), $x^2 + xy + y^2 - 1 < 0$

$x^2 + xy + y^2 < 1$ (4)

6б

4) Нер-ям (3), (4) удволетворяют области значений $x; y$.

Ответ: данные условия удволетворяют неравенству

Место для скобы

Шифр 08501

Задание 4

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023}(x) + 2024\sin^{2025}(x)$

Заменим: $\cos(2x) = \sin x$; $\sin x = \cos(2x)$:

$\sin x + \sin^{2023} x + 2024\sin^{2025} x = \cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x)$

Общий вид уравнения не изменился $\Rightarrow$ это симметричное ур-е $\Rightarrow$ $\sin x = \cos 2x$

Израсх. обсн.

3б

$\cos 2x - \sin x = 0$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad |\cdot(-1)$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Вернёмся к замене:

$\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x_2 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$; $n; k \in \mathbb{Z}$

Место для скобы

Шифр 08501

Задание 1

1) Чтобы отношение искомо числа к сумме его цифр было минимальным $\left(\frac{\overline{xyzi}}{x+y+z+i}\right)$, числитель должен быть минимальным, а знаменатель - максимальным.

2) Чтобы условия из п. (1) выполнялись, первая половина числа, т.е. старшие разряды должна быть минимальной, вторая половина - максимальной. Шифр. идея.

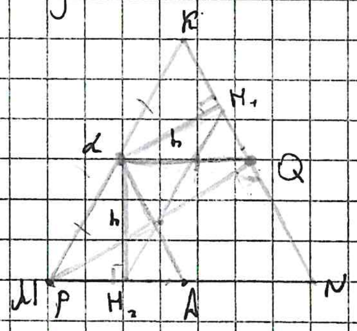
3) Наименьшее 2-ух знач. число 10, а наибольшее 99

4) Проверка: $\frac{1099}{1+0+9+9} = \frac{1099}{19} = 57\frac{16}{19}$

3б

Ответ: 1099

Задание 5.



Дано:

ΔMNK, $MN = NK = MK$; P MN; Q NK

$ML = LK$; $PL = QL$; $PQ \not\parallel MK$

Найти: ΔPQL

7б

Решение:

1) Из т. L проведём высоты на MN; KN - H_2; H_1 соответсвенно. Отразим ΔLH_1K относительно LH_1, получим ΔLH_1Q, тогда $ML = LK = LQ$, т. P совпадёт с т. M. Это будет макс. значение QL

2) $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ (ед)

3) $ML = \frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (ед)

4) Поставим т. A, $MA = AN = AL = ML$. Из $\triangle AML$ найдём высоту MO: $\sqrt{ML^2 - \frac{1}{4}ML^2} = \sqrt{(ML - \frac{1}{2}ML)(ML + \frac{1}{2}ML)} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}} =$
$= \sqrt{\frac{3}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ (ед).

5) $PQ_{max} = 2MO = \sqrt[4]{3}$ (ед)

6) $PQ_{min} = H_1H_2$. Из $\triangle NH_1H_2$: $NH_1 = \frac{3}{4}KN = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$ (ед) $=$

~~7) По теор. косинусов,~~ $\cancel{H_1H_2^2 = 2NH_1^2 - 2NH_1^2 \cos 60^\circ}$.

$\cancel{HH_1^2 = 2NH_1^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$

$\cancel{HH_1}$

$= H_1H_2$ (т.к. $\triangle NH_1H_2$ – правильный)

Ответ: $|PQ| \in \left[\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}; \sqrt[4]{3}\right]$ (ед)