

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
265	18.03.25	Гавриш	
Шифр			043124

1/2/3/4/5
5/7/7/7/0

1. Пользуясь неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$ (которое справедливо и для отрицательных значений x, y, z) получаем:

$$\sqrt{\frac{(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2}{3}} \geq \frac{7+a-b+2+b-c+9+c-a}{3} =$$

$$= \frac{18}{3} = 6. \text{ Отсюда (так как обе части положительны):}$$

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \geq 6^2 \cdot 3 = 108$$

Равенство (а следовательно минимальное значение левой части) достигается при $7+a-b=2+b-c=9+c-a=6$.

Проверим, возможен ли такой случай:

$$\begin{cases} 7+a-b=6 \\ 2+b-c=6 \\ 9+c-a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ b-c=4 \\ c-a=-3 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим $0=0 \Rightarrow$ система имеет бесконечное количество решений, значит так и возможно.

Ответ: 108

$$2. P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506 = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$: $Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = x^2(Q(x_1) + Q(x_2) + Q(x_3) + Q(x_4)) -$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 \cdot 506 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$$

$Q(x)$ - многочлен 4-ой степени с коэффициентами $a=1, b=1, c=-4, d=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$ по теореме Виета.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

043124

Получа $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 2024 = 2025$

Ответ: 2025

3. $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$
 $(x^2+1) - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x^2+1} + 9 + 1 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + 1 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

$\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 1 + (\sqrt{x^2+1} - 3)^2$

Поскольку $\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \in [-1; 1]$, правая часть не может быть больше 1: $1 + (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \leq 1$

$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - 3 = 0$
 $\sqrt{x^2+1} = 3$

$x^2 + 1 = 9$

$x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 1$

при $x = 2\sqrt{2}$: $\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = \cos \frac{8 + 4 - 4}{18} = \cos \frac{8}{18} \neq 1$

при $x = -2\sqrt{2}$: $\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = \cos \left(\frac{8 - 4 - 4}{18} \right) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow x = -2\sqrt{2}$

Ответ: $-2\sqrt{2}$

4. Без ограничений общности положим $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$

Максимальное x_1 должно удовлетворять:

$\underbrace{x_1^{n-1} + x_1^{n-1} + x_1^{n-1} + \dots + x_1^{n-1}}_{n \text{ раз}} = \underbrace{x_1 \cdot x_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_1}_n$
 $n x_1^{n-1} = x_1^n$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$x_1^n - n x_1^{n-1} = 0$$

$$x_1^{n-1} (x_1 - n) = 0$$

$$x_1^{n-1} = 0 \quad \text{или} \quad x_1 - n = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = n$$

$x_1 > 0 \Rightarrow$ не удовн.

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)(x_3 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq (x_1 - n + 1)(x_1 - n + 1) \dots$$

$$\dots (x_1 - n + 1) \geq (n - n + 1)(n - n + 1) \dots (n - n + 1) = 1$$

У.П.Д.