Шифр 08051

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
24	18.03	Корчкова Е.Е.	[signature]

1	2	3	4	5	Σ
7	3	7	7	0	24

1. $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$

Пусть $a = 3^{2023}$, $b = 5^{1012}$,

$a^2 - ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 3ab =$

$= (a+b)^2 - 3ab \Rightarrow$

$\Rightarrow (3^{2023} + 5^{1012})^2 - 3 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} =$

$= (3^{2023} + 5^{1012})^2 - (3^{1012} \cdot 5^{506})^2 =$

$= (3^{2023} + 5^{1012} - 3^{1012} \cdot 5^{506})(3^{2023} + 5^{1012} + 3^{1012} \cdot 5^{506})$ — произведение двух выражений $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ составное

ч.т.д. +

3. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы брусков, а $m_{з1}$ и $m_{з2}$ — масс золотой части 1-ого и 2-ого бруска.

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \dfrac{m_{з1}}{m_1 + m_3} = 0{,}2 \\ \dfrac{m_{з2}}{m_2 + m_3} = 0{,}2 \\ \dfrac{m_{з1} + m_{з2}}{m_1 + m_2} = 0{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{з1} = 0{,}2(m_1 + m_3) \\ m_{з2} = 0{,}2(m_2 + m_3) \\ \dfrac{0{,}2(m_1+m_3) + 0{,}2(m_2+m_3)}{m_1+m_2} = 0{,}3 \end{cases}$$

(*)

$(*)$: $\frac{0,2(m_1+m_3)+0,2(m_2+m_3)}{m_1+m_2} = 0,3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,2m_1+0,2m_3+0,2m_2+0,2m_3 = 0,3m_1+0,3m_2$

$0,2m_3+0,2m_3 = 0,3m_1-0,2m_1+0,3m_2-0,2m_2$

$0,4m_3 = 0,1m_1+0,1m_2$

$m_3 = \frac{0,1(m_1+m_2)}{0,4} = 0,25(m_1+m_2)$

Содержание золота в сплаве всех брусков равно $\frac{m_{з1}+m_{з2}}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m_{з1}+m_{з2}}{1,25m_1+1,25m_2} =$

$= \frac{1}{1,25}\cdot\frac{m_{з1}+m_{з2}}{m_1+m_2} = \frac{1}{1,25}\cdot 0,3 = \frac{3}{12,5} = 0,24$

Ответ: 0,24 $\quad$ 24% $\quad$ +

4. $b^2-a^2 > b-a$

$(b-a)(b+a)-(b-a)>0$

$(b-a)(b+a-1)>0$

$a<\frac{1}{2}, b<\frac{1}{2} \Rightarrow a+b<1 \Rightarrow b+a-1<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{b-a<0} \; (*)$

Докажем $b^3-a^3>b-a$:

$(b-a)(b^2+ab+a^2)-(b-a)>0$

$(b-a)(b^2+ab+a^2-1)>0$

$b-a<0 \; (*) \Rightarrow b^2+ab+a^2-1$ должно быть <0

$0<a, b<\frac{1}{2} \Rightarrow a^2, b^2, ab < \frac{1}{4} \Rightarrow$

Место для скобы

Шифр 08051

$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1<0$

$\frac{3}{4}-1<0$

$-\frac{1}{4}<0$ - ч.т.д.

2 $t^4-2\sqrt{13}\cdot t^2+t+13-\sqrt{13}=0$

$y=\sqrt{13}$

$y^2-y-2t^2y+t^4+t=0$

Решаем относительно y:

$y^2-(1+2t^2)y+t^4+t=0$

$D=(1+2t^2)^2-4\cdot1\cdot(t^4+t)=4t^2-4t+1=$
$=(2t-1)^2$

$y=\frac{1+2t^2\pm\sqrt{(2t-1)^2}}{2}=\frac{1+2t^2+|2t-1|}{2}$

$1+2t^2+|2t-1|=2\sqrt{13}$

1) $2t>1$:

$1+2t^2+2t-1=2\sqrt{13}$

$2t^2+2t-2\sqrt{13}=0$

$D=2^2+4\cdot2\cdot2\sqrt{13}=4+16\sqrt{13}$

$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16\sqrt{13}}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+4\sqrt{13}}}{4}$

~~2) $2t<1$~~

$t_3?\ t_4?$