

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
24		Емелинов	Емелин
Шифр			043200

$$1) (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 7 & 7 & 3 & 6 & 1 & 24 \end{array}$$

Введем новые переменные

$$7+a-b = x$$

$$2+b-c = y$$

$$3+c-a = z$$

$$x+y+z = 7+a-b + 2+b-c + 3+c-a = 12$$

Применим неравенство Коши:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{12^2}{3} = 48$$

Минимальное значение достигается, когда $x=y=z$, то есть:

$$\begin{cases} 7+a-b = x \\ 2+b-c = y \\ 3+c-a = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = -1 \\ b-c = 4 \\ c-a = -3 \end{cases}$$

Складывая получим

$$(a-b) + (b-c) + (c-a) = -1 + 4 - 3 = 0$$

Ответ: 48

$$2) P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Найдите сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

Т.е. x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$, упрощая вычислить сумму значений $P(x)$ по модулю $Q(x)$. Найдем остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$ по модулю, если $P(x) = R(x) \cdot Q(x) + \dots$, то сумма значений $P(x)$ в корнях $Q(x)$ равна сумме значений $R(x)$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			043200

Разделим $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

$R(x)$ — остаток имеющий степень
меньше 4

$$\frac{x^6}{x^4} = x^2$$

$$x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2$$

Вычитаем:

$$x^6 + x^5 - 4x^4 - x + 506 - (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2) = -x + 506$$

$$R(x) = -x + 506$$

Вычислим сумму: т.к. x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = R(x_1) + R(x_2) + R(x_3) + R(x_4)$$

Подставим $R(x) = -x + 506$

$$\begin{aligned} & (-x_1 + 506) + (-x_2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506) = \\ & = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \cdot 506 \end{aligned}$$

Сумма корней x_1, x_2, x_3, x_4 находится из коэффициентов
 $Q(x)$ по т. Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{1}{1} = -1$$

$$-(-1) + 4 \cdot 506 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

$$3) \quad x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

Введение переменной: $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $t \geq 1$

$$\text{т.к. } -1 \leq \cos \leq 1, \text{ получаем } -1 \leq \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$$

$$10 \leq 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 12$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\begin{cases} x^2 - 6t + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6t + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{x^2 + 11 - 6t}{6} = \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

, Рассмотрим случай $x=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \text{ Рассмотрим случай } x=3 \Rightarrow t = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

ответ: $x=3$

4) $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$,

Докажите неравенство $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

$$y_i = x_i - (n-1), \quad x_i = y_i + (n-1)$$

$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 1$ Нужно доказать, что произведение y_i не меньше 1

Подставим

$$x_i = y_i + (n-1) \text{ в заданное равенство}$$

$$(y_1 + n - 1)^{n-1} + (y_2 + n - 1)^{n-1} + \dots + (y_n + n - 1)^{n-1} = (y_1 + n - 1)(y_2 + n - 1) \dots (y_n + n - 1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$$

Используем неравенство Йенсена для выпуклой функции

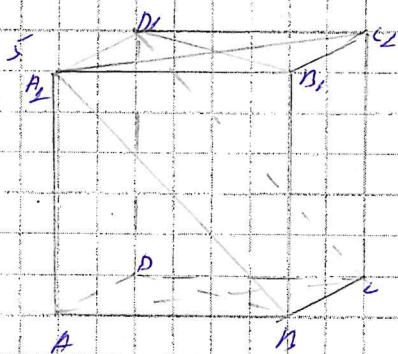
$$(y + n - 1)^{n-1} \leftarrow \text{покажем, что выпуклая!}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)$$

нет
обоснования

Среднее значение y_i больше или равно 1 (следует из симметричного условия), следовательно $y_1 y_2 \dots y_n \geq 1$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1 \quad \text{з.т.р.}$$



Доказ.

 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ - куб α, β $\alpha \perp A_1C_1, \beta \parallel CD_1$ Найти $\angle \alpha \beta$?

Решение.

$\alpha \perp A_1C_1 \Rightarrow$ нормаль к плоскости $\alpha \perp A_1C_1$. В кубе прямая A_1C_1 - диагональ пространственных квадратов боковых граней.

$\beta \parallel CD_1$. Это означает, что нормаль к этой плоскости ортогональна направлению CD_1 , а сама плоскость содержит прямую, параллельную CD_1 . Нормаль к α так как плоскость $\perp A_1C_1$, то нормаль к ней может быть направлена в одну из диагоналей граней. Например BD . Нормаль к β .

Поскольку плоскость $\parallel CD_1$, то её нормаль может быть направлена в том же направлении. Например BD .

В кубе угол между диагоналями соприкасающихся граней равен 45° .

Ответ: 45°