

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
19	14.03	Хмелева	

Шифр

042234

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \Sigma \\ 0 \ 7 \ 2 \ 7 \ 3 \end{array} \quad 195$$

Задача 1

1) $F(a, b, c) = (10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2$

Найдем частные производные!

1. $F'(a) = 2(10 + a - b) + 2(3 + c - a)(-1) =$
 $= 2(10 + a - b) - 2(3 + c - a) = 4a - 2b - 2c + 14$

2. $F'(b) = 2(10 + a - b)(-1) + 2(2 + b - c) =$
 $= -20 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 16$

3. $F'(c) = 2(2 + b - c)(-1) + 2(3 + c - a) =$
 $= -4 - 2b + 2c + 6 + 2c - 2a =$
 $= -2a - 2b + 4c + 2$

f - функция
3-ех переменных!

2) Приравниваем к 0

1) $\begin{cases} 4a - 2b - 2c + 14 = 0 \\ 2a - b - c + 7 = 0 \end{cases} \quad : 2 \quad a$

2) $\begin{cases} -2a + 4b - 2c - 16 = 0 \\ -a + 2b - c - 8 = 0 \end{cases} \quad : 2 \quad b$

3) $\begin{cases} 2a - 2b + 4c + 2 = 0 \\ -a - b + 2c + 1 = 0 \end{cases} \quad : 2 \quad c$

3) $(2a - b - c + 7) - (-a + 2b - c - 8) = 0$
 $3a + 3b + 15 = 0$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$a - b + 5 = 0$$

$$a = b - 5$$

$$-b + 5 - b + 2c + 1 = 0$$

$$-2b + 2c + 6 = 0$$

$$-b + c + 3 = 0$$

$$c = b - 3$$

$$\begin{aligned} a &= b - 5 \\ c &= b - 3 \end{aligned}$$

$$2(b-5) - b - (b-3) \stackrel{+7}{=} 0$$

$$2b - 10 - 2b - +3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$F(b) = (10 + (b-5) - b)^2 + (2+b - (b-3))^2 + (3 + (b-3) - (b-5))^2$$

$$F(b) = 5^2 + 5^2 + 5^2$$

$$F(b) = 25 + 25 + 25 = 75$$

$$\text{Ответ: } 75$$

$$75$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 2

$$F(x) = x^2 + ax + b$$

Абсцисса вершины $x_0 = -\frac{a}{2}$

$$\text{Ордината вершины } y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b$$

$F(x) \geq -\frac{9}{10}$ для всех действ. $x \Rightarrow$ мин. знач.
функции не меньше $-\frac{9}{10} \Rightarrow -\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10}$

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$$

+ к a и b целые $\Rightarrow a^2$ - четное число

Рассмотрим b

Если $a=0$, то $b \geq \frac{9}{10} \Rightarrow b \geq 1$ (т.к. $b \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow F(x) = x^2 + b \geq 0$ (т.к. $b \geq 0$ и $x^2 \geq 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{4} \quad \checkmark$$

Если $a=1$, то $b \geq \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = \frac{5-18}{20} = -\frac{13}{20}$

$\Rightarrow b \geq 0$ (т.к. b целое) $\Rightarrow$ $\checkmark$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + x + b \geq x^2 + x$$

Мин. знач. $x^2 + x = -\frac{1}{4}$ $\checkmark$

Если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $b \geq \frac{9}{10} \Rightarrow b \geq 1$ (т.к. $b \in \mathbb{Z}$)
 $\Rightarrow F(x) = x^2 + ax + b \geq 0$ (т.к. $b \geq 0$ и $x^2 \geq 0$) $\Rightarrow$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Если $a=0$, то $b \leq -\frac{1}{10} \Rightarrow b < 0$ ($b \in \mathbb{Z}$)
 $\Rightarrow F(x) = x^2 + b \geq 0$ (так $b \geq 0$ и $x^2 \geq 0$) $\Rightarrow$

?

~~30~~ $\Rightarrow$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$\Rightarrow F(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{4}$$

Если $a=1$, то $b \geq \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = -\frac{3}{10} \Rightarrow b \geq 0$

Миним. знач. $x^2 + x = -\frac{1}{4}$ (при $x = -\frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow F(x) \geq -\frac{1}{4}$$

Если $a=2$, то $b = \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = -\frac{1}{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b \geq 1 \quad (b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow F(x) = x^2 + 2x + b \geq$$

$$\geq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{4}$$

Если $|a| \geq 3 \Rightarrow b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \geq 1$

$$b \geq 2 \Rightarrow F(x) = x^2 + ax + b \geq \frac{a^2}{4} + 2 > -\frac{1}{4}$$

Так $\frac{a^2}{4} < \frac{9}{10} \leq b \Rightarrow$ Во всех случаях x

$F(x) \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow$ для всех действ. знач. x
выполнено $F(x) \geq -\frac{1}{4}$

75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 3

$$a_1 = 25$$

$$a_{2025} = 625$$

$$a_{2025} = a_1 + d(n-1) = 25 + d \cdot 2024 =$$

$$\Rightarrow d = \frac{75}{253} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

$\sqrt{a_1}$ и $\sqrt{a_{2025}}$ встречаются единичное
а остальные $\sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots, \sqrt{a_{2024}}$
по два раза

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2025}} + 2 \cdot (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2024}})$$

$$650 + 2 \cdot (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2024}})$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

в числителе
два раза

$$\sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_1}$$

и т.д.

$$\sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_2}$$

в знаменателе

будут по

~~два~~ a_2 и

7



24 и 6

6

24

8

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 4

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

$$1) P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x - 15$$

Выразим $P(x)$ через $Q(x)$, если $Q(x) = 0$

$$\frac{x^6}{x^4} = x^2$$

$$x^2 Q(x) = x^6 - x^5 - 4x^4 + x^2$$

$$P(x) - (x^6 - x^5 - 4x^4 + x^2) = -x + 50$$

$$P(x) = Q(x) \cdot x^2 + (-x + 50)$$

$$P(x_1) = Q(x_1) \cdot (x_1)^2 + (-x_1 + 50)$$

Если $Q(x_1) = 0$, то

$$P(x_1) = -x_1 + 50$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 50) + (-x_2 + 50) + (-x_3 + 50) + (-x_4 + 50) = - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 200$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 200 = 1 + 200 = 201$$

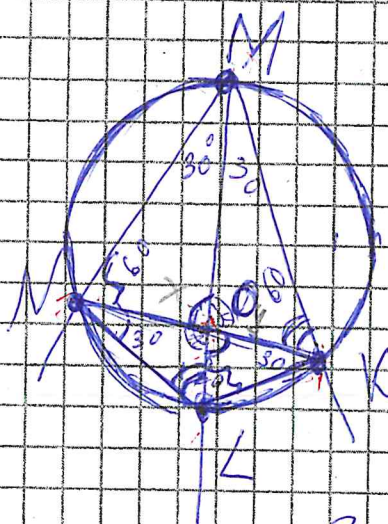
Ответ: 201

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 5



Решение:

$$\angle N M K = 2 \cdot \angle L M N = 60^\circ$$

$$\angle N L K = 180 - \angle N M K = 180 - 60 = 120^\circ$$

$$S_{M N L K} = S_{M N K} + S_{N K L}$$

Рассмотрим $\triangle M N L K$

Т.к. $\angle N M L$ и $\angle N K L$ опир. на $N L \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle N M L = \angle N K L = 30^\circ$

Т.к. $\angle L N K$ и $\angle L M K = 30^\circ$ опир. на $L K \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle L N K = \angle L M K = 30^\circ$

Рассмотрим $\triangle N L K$

$$\angle L N K = \angle N K L = 30^\circ \Rightarrow \angle N L K = 120^\circ$$

(по сумме углов в $\triangle$) $\Rightarrow \triangle N L K$ - р/б;

$$N L = L K$$

На $M N$ опир. $\angle N L M$ и $\angle M K N \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle N L M = \angle M K N$

Дано:

окр. $(R; O)$

$\angle N M K$

$M L$ - бис.

$$S_{M N L K} = 81$$

$$\angle L M N = 30^\circ$$

Найти:

$M N + M K$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 5 $NK \perp ML \Rightarrow \angle N = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle NLO \sim \triangle MKO ; \checkmark$$

Т.к. на МК опущ. $\angle MNK$ и $\angle MKL \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle MNK = \angle MKL \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle MNO \sim \triangle OKL \checkmark$$

$$\frac{NL}{MK} = \frac{NO}{MO} = \frac{OL}{OK} \checkmark \text{ (по признаку подобия)}$$

$$\frac{LK}{MN} = \frac{KO}{MO} = \frac{LO}{NO} \checkmark \text{ (по признаку подобия)}$$

~~NO~~
~~OK~~

$$\frac{NO}{MO} = \frac{LO}{OK}$$

$$\frac{MO}{OK} = \frac{NO}{LO}$$

Т.к. отрезки имеют вид $\frac{NO}{MO} = \frac{LO}{OK}$

$\triangle$ OK , где k - коэф. подобия $\Rightarrow$

$$\frac{S_{MOK}}{S_{NOZ}} = k$$

$$\frac{S_{NOM}}{S_{OKL}} = k \text{ (} k \text{ коэф. подобия)}$$

k

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Дано: $M \in \text{бис} \rightarrow \angle NLO = \angle KLO = 60^\circ$

Рассмотрим $\triangle NLO$ -

по условию $\angle NOL = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle NLO = \angle MOK = \angle NOM = \angle LOK = 90^\circ$

(в окр. 360°)

по св-ву медианы $\triangle OL = \frac{1}{2} NL$

Так $\triangle NOL = \triangle OLK$ (по стороне OL и двум
прилежащим $\angle$) $\Rightarrow$

$$OL = \frac{1}{2} NL = \frac{1}{2} LK$$

Рассмотрим $\triangle NMO$ и $\triangle MOK$

$\triangle NMO = \triangle MOK$ (по стороне MO и
двум прилежащим $\angle$) $\Rightarrow \triangle NMK$ - р/б

$NM = MK \Rightarrow \angle NML = \angle MKL$

(по двум сторонам (или трем) $NL = LK$;
 $NM = MK$; ML - общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Так $\angle NMK = 60^\circ$; $\triangle NMK$ - р/б $\Rightarrow$

по св-ву р/б $\angle MNK = \angle MKN = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle MNK$ - равносторонний

Так $S_{\text{равносторонн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{MNK} = \frac{ML^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$24 = 3\sqrt{3}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$\text{Т.К. } \frac{S_{MOK}}{S_{MOL}} = \frac{OK}{OL} \Rightarrow \frac{2 S_{MOK}}{2 S_{MOL}} = \frac{OK}{OL} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNKL}}{8} = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{32K} = 81$$

$$S_{NML} = NO \cdot ML \cdot \frac{1}{2} \quad S_{MKL} = \frac{1}{2} MLNO$$

$$S_{MNKL} = NO \cdot ML$$

Т.К. $\triangle NML$ - равност., $\angle ONL = \angle OKL = 30^\circ \Rightarrow \triangle NML$ и $\triangle MKL$ - прямоугол.;
 $\angle LNM = \angle MKL = 90^\circ \Rightarrow ML$ - диаметр
 по св-ву прямоугол. $\triangle MN = 2 \cdot MK$

$$S_{NML} = \frac{1}{2} MN \cdot NL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MN = \frac{1}{4} MN$$

$$S_{MNKL} = 2 S_{NML} = \frac{1}{2} MN$$

$$81 = \frac{1}{2} MN$$

$$MN = 162$$

$$MN + MK = 81$$

35

