

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
| 22         |      | Евсеев      | Евсеев  |
| Шифр       |      | 042280      |         |

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Sigma \\ \hline 1 & 7 & 6 & 5 & 3 & 22 \end{array}$$

1. Заметим, что  $(7+a-b)^2 \geq 0$ ,  $(2+b-c)^2 \geq 0$ ,  $(9+c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \geq 0$$

Но  $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 = 0$ , только при

$$\begin{cases} 7+a-b=0 \\ 2+b-c=0 \\ 9+c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-7 \\ b-c=-2 \\ c-a=-9 \end{cases}$$

возможно ли это?

Сложим все уравнения и получим, что  $0 = -18$ , что невозможно.

Следовательно  $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \neq 0$

Очевидно, что  $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \rightarrow \min$ , при

$$\begin{cases} a-b \leq 0 \\ b-c \leq 0 \\ c-a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \\ c \leq a \end{cases} \Rightarrow a \leq b \leq c \leq a, \text{ такое возможно только}$$

при  $a=b=c \Rightarrow (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \rightarrow \min$ , при

$$a=b=c$$

Тогда минимальное значение равно  $7^2 + 2^2 + 9^2 = 49 + 4 + 81 = 134$

Ответ: 134

$$2. Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506 = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

$$\begin{aligned} P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) &= x_1^2 Q(x_1) - x_1 + 506 + x_2^2 Q(x_2) - x_2 + 506 + \\ &+ x_3^2 Q(x_3) - x_3 + 506 + x_4^2 Q(x_4) - x_4 + 506 = x_1^2 Q(x_1) + x_2^2 Q(x_2) + x_3^2 Q(x_3) + \\ &+ x_4^2 Q(x_4) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 506 \cdot 4 \end{aligned}$$

Но так как  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни  $Q(x)$ , то  $Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$

и по теореме Виета  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) =$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 - (-1) + 506 \cdot 4 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр

043380

$$3. \quad x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18} = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18}, \text{ но } \cos \alpha \in [-1; 1], \text{ следовательно}$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 \geq -1$$

$$(\sqrt{x^2+1})^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 10 \geq -1$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + 1 \geq -1$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \geq -2, \text{ но } (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \geq 0 \geq -2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \leq 0, \text{ но } (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 \geq 0, \text{ следовательно}$$

$$(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{8}$$

Проверим <sup>как?</sup> полученные корни и поймём, что

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18} = 0, \text{ только при } x = -\sqrt{8}$$

Ответ:  $x = -\sqrt{8}$

$$4. \quad x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

По неравенству Коши  $\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{n-1}}$ , но так как

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n, \text{ то } x_1 = x_2 = \dots = x_n, \text{ потому что}$$

$$\frac{n \cdot x_n^{n-1}}{n} = \sqrt[n]{x_n^{n(n-1)}}$$

$$x_n^{n-1} = x_n^{n-1}$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) = (x_n - n + 1)^n, \text{ при } x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

$$\text{Раскроем по биному Ньютона } (x_n - n + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x_n - n)^{n-k} \cdot 1^k =$$

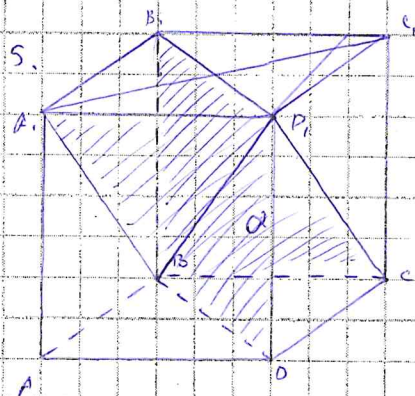
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot (x_n - n)^{n-k} + 1 \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot (x_n - n)^{n-k} \geq 0$$

$$\text{Но если } x_1 = x_2 = \dots = x_n, \text{ то } n \cdot x_n^{n-1} = x_n^n \Rightarrow n \leq x_n \Rightarrow x_n - n \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (x_n - n)^{n-k} \geq 1 \Rightarrow (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Ответ: з.т.г.

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |



Заметим, что  $B_1D \in \alpha, \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle B_1BD_1 = \alpha^1 \beta$$

$$B_1D_1^2 = AB_1^2 + A_1D_1^2$$

$$B_1D_1^2 = BB_1^2 + AB_1^2 + A_1D_1^2$$

Пусть сторона куба равна 1, тогда

$$BB_1 = 1 \quad B_1D_1 = \sqrt{2} \quad B_1D = \sqrt{3}$$

По теореме косинусов

$$B_1D_1^2 = BB_1^2 + BD_1^2 - 2BB_1 \cdot BD_1 \cdot \cos \angle B_1BD_1$$

$$2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} \cos \angle B_1BD_1$$

$$\cos \angle B_1BD_1 = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\angle B_1BD_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

поэтому  
это самый маленький  
угол?

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$