

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
21		Емельянов	Ем
		Шифр	

$$\begin{array}{r|rrrrr|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Sigma \\ \hline 7 & - & 7 & 7 & - & 21 \end{array}$$

Задача №1.

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$x^2 - \frac{10}{3}xy + y^2 = 0$$

$$\exists \frac{x}{y} = t, \text{ тогда}$$

$$t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0$$

$$D = \frac{100}{9} - 4 = \frac{64}{9} > 0, \text{ 2 корня}$$

$$t_1 = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{так как следует, что}$$

$x < y$, что противоречит условию $||' \rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 3, \quad x = 3y$$

Подставим x в некоторое выражение

$$\frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$$

Ответ: 2.

Задача №4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

По обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Исходное выражение преобразуем:

$$\begin{aligned}
 x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \\
 &= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \\
 \Rightarrow \text{Подставив сюда, что получено} & \text{ ранее}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (p^2 + \frac{1}{p^2})^2 - \frac{1}{2p^4} &= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = \\
 &= p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2.
 \end{aligned}$$

Если докажем, что $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$, задача решена.

~~Рассмотрим $p^4 + \frac{1}{2p^4}$ и докажем, что оно больше квадрата.~~

~~$$\begin{aligned}
 (p^2 + \frac{1}{p^2})^2 &= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} \\
 &= p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 + \frac{1}{2p^4} \\
 &\geq 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} + 2 = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2 = \sqrt{2} + 2
 \end{aligned}$$~~

Рассмотрим $p^4 + \frac{1}{2p^4}$ с помощью неравенства Коши.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad m \in$$

$$\frac{p^4 + \frac{1}{2p^4}}{2} \geq \sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

ч. т. д.

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача №3

Преобразуем $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1) + (2n^3 - 2n)}{n^4} = \\
 &= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2n + 1)}{n^4} = \\
 &= \frac{(n-1)(n+1)(n+1)^2}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} +
 \end{aligned}$$

Подставим значения $a_2; a_3; a_4; \dots; a_{99}$

$$\frac{1 \cdot 3^3}{2^4} + \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} + \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} + \frac{4 \cdot 6^3}{5^4} + \dots + \frac{97 \cdot 99^3}{98^4} + \frac{98 \cdot 100^3}{99^4} =$$

Заметим, что почти все сокращается в группах. Числа в одной группе в произведении дают 1. у нас остаются числа в квадратах, т.е.

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \cdot 99^3 \cdot 100^3}{2^4 \cdot 99^4} &= \frac{100^3}{2^3 \cdot 99} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 100}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 99} = \frac{50^3}{99} + \\
 &= 1262 \frac{62}{99}
 \end{aligned}$$