Место для скобы

**Шифр** 08478

## Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 14б | 23.03.24 | Гендрина | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | | 3 | 1 |

№1

Доказательство

Для получения минимального соотношения, первые две цифры числа должны быть минимальными, а последние максимальными.

Итого - один. 3б

Варианты: 1099, 1199, 1299

$\frac{1099}{1+0+9+9} = \frac{1099}{19} = 57\frac{16}{19}$

$\frac{1199}{1+1+9+9} = \frac{1199}{20} = 59\frac{19}{20}$

$\frac{1299}{1+2+9+9} = \frac{1299}{21} = 61\frac{18}{21}$

$1199 : 20 = 59$ (ост. 19); $1299 : 21 = 61$ (ост. 18)

$\Rightarrow$ 1099 имеет минимальное соотношение $\Rightarrow$

Ответ: 1099

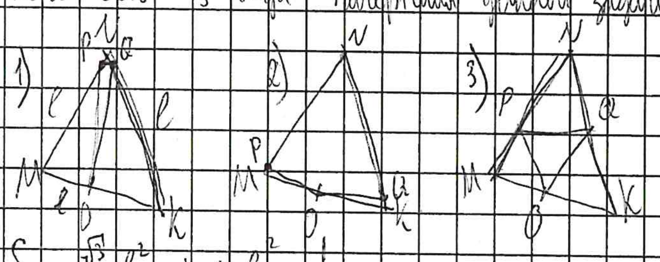
№5

Дано:
MNK - р/с
$S_\Delta = 1$
$PQ \parallel MK$
$PQ$ - ?

Всего есть 3 вида начертания данной задачи, когда PQ стремится к 0 (находится в точке N)

Когда PQ стремится к длине стороны (совпадает с точками M и K)

когда находится на сторонах MN и NK



$S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = 1 \Rightarrow l^2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$l^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$l = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3} = MK = MN = NK \Rightarrow$

1б

$\Rightarrow$ PQ может стремится к 0 и может стремится к $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$ или быть между данными значениями

Ответ: $PQ \in \left(0; \frac{2\sqrt[4]{3}}{3}\right)$

Место для скобы

Шифр 08478

~~№~~

№ 4

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cdot\cos^{2024}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024\sin^{2025}(x)$

Задача решается только, если:

1) $\cos(2x) = \sin(x)$

2) $\cos^{2023}(2x) = \sin^{2023}(x)$

3) $2024\cdot\cos^{2024}(x) = 2024\cdot\sin^{2025}(x)$

Везде одинаковая основная часть,

$\cos(2x) = \sin(x)$ и будет решением

$1 - 2\sin^2 x = \sin(x)$

Замена: $t = \sin(x)$; $\begin{cases} t \geq -1 \\ t \leq 1 \end{cases}$

$1 - 2t^2 = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x) = -1 \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \cdot \arcsin(\frac{1}{2}) + \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ и $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}, k \in Z$

Недост. обосн.

3б

№ 2

$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ 0 < xy < \frac{1}{4} \\ 6y^2 - x^2 > y - x \end{cases}$

0б

Если:

а) $y > x$ и $y - x > 0$

$y^2 - x^2 > y - x$

$(y - x)(y + x) > y - x \quad |:(y - x)$

$y + x > 1$ – это условие не подходит

~~Ответ: ∅~~

б) $y < x$ и $y - x < 0$

$y^2 - x^2 > y - x \quad |:(y - x)$ – делим на число, которое меньше 0

$y + x < 1$

$y^3 - x^3 > y - x$

$(y - x)(y^2 + xy + x^2) > y - x \quad |:(y - x)$ – меньше 0

$y^2 + x^2 + xy \leq 1$

$(y + x)^2 - 2xy + xy \leq 1$

$(y + x)^2 - xy \leq 1$

$(y + x)^2 - xy < 1$, $y + x < 1 \Rightarrow (y + x)^2 < 1$, раз мы от числа меньше 1 отнимаем еще дробь, то ответ будет меньше единицы ч. т. д.

в) $y = x$ и $y - x = 0$

$y^2 - x^2 > y - x$

$0 > 0$ – условие не подходит