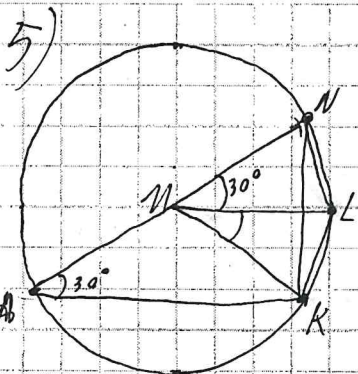


Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
165	20.03.25	Гусарова А	
Шифр			918409

Рисунок не счит. условием



Дано: ML - биссектриса угла NMK ; $S_{MNK} = 81$; $\angle LMN = 30^\circ$

Найти: $MN + MK$

Решение:

ML - бисс. угла $NMK \Rightarrow \angle LMN = \angle LMK \Rightarrow \angle LMN = \angle LMK = 30^\circ \Rightarrow \angle MNK = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle MNK = 60^\circ$ - центральный угол

Проведем хорду AK и вписанный угол ANK

ANK - вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle NAK + \angle KLN = 180^\circ$
 $\angle NAK$ и $\angle KLN$ - противолежащие

$\Rightarrow \angle KLN = 150^\circ$

$S_{MNK} = S_{MNL} + S_{NKL}$

$\angle MNK = 60^\circ$

$MN = MK = R \Rightarrow \angle MNK = \angle MKN$ (по свойству углов равнобедренного треугольника)
 $\angle MNK + \angle MKN + \angle KMN = 180^\circ$ (по свойству углов треугольника)

$\Rightarrow 60^\circ + 2\angle MKN = 180^\circ \Rightarrow \angle MKN = 60^\circ \Rightarrow \angle MNK = \angle MKN = 60^\circ \Rightarrow \triangle MNK$ - равносторонний $\Rightarrow MN = MK = NK$

$S_{MNK} = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MNK} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$

$S_{NKL} = \frac{NL \cdot KL \cdot \sin 150^\circ}{2} \Rightarrow S_{NKL} = \frac{NL \cdot KL \cdot \sin 30^\circ}{2}$

$MN = NL = MK$ рассмотрим $\triangle MNL$ и $\triangle MKL$: $MN = NL = MK = R \Rightarrow \triangle MNL = \triangle MKL$ (по 2 сторонам и углу между ними)
 $\angle NML = \angle KML$

$\Rightarrow NL = KL$

$NL = \sqrt{MN^2 + ML^2 - 2 \cdot MN \cdot ML \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{2R^2(1 - \cos 30^\circ)}$

$\Rightarrow NL = KL = \sqrt{2R^2(1 - \cos 30^\circ)}$

$S_{NKL} = \frac{NL \cdot KL \cdot \sin 150^\circ}{2}$

$\Rightarrow S_{NKL} = \frac{(\sqrt{2R^2(1 - \cos 30^\circ)})^2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{2R^2(1 - \cos 30^\circ) \cdot \frac{1}{2}}{2}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 918409

5) продолжиме) $S_{NLK} = \frac{1}{2} R^2 (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$
 $S_{MNLK} = R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$; $S_{MNLK} = S_{MNH} + S_{NLK} \Rightarrow S_{MNLK} = R^2 (\frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{4}) =$
 $= R^2 (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{R^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2 S_{MNLK}} \Rightarrow$
 $MN + MK = 2R$

$MN + MK = 2\sqrt{2 S_{MNLK}} \Rightarrow MN + MK = 2\sqrt{2 \cdot 81} = 18\sqrt{2}$
 $S_{MNLK} = 81$

Ответ: $18\sqrt{2}$

4) $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^3 - x + 50$
 $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \Rightarrow P(x) = Q(x) \cdot x^2 - x + 50$

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x) \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0 \Rightarrow$
 $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 + 50 - x_2 + 50 - x_3 + 50 - x_4 + 50 =$
 $= 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = Q(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Q - многочлен, равный многочлену $x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$, т.к. при равных степенях переменной стоят равные коэффициенты, также $Q + 1 = 0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (по теореме об обратных корнях по теореме Виета)

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Rightarrow 200 - 1 = 199$

Ответ: 199.

3) $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = S =$

$= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{a_{2024} - a_{2025}}$

$a_n - a_{n+1} = a_1 + (n-1)d - (a_1 + n \cdot d) = -d$

$= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-d}$

$(a_{i+1} = a_i + d \Rightarrow)$
 $\Rightarrow a_{i+1} \neq a_i \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}} \neq 0$

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

(3 продолжение) $S = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d}$ $253 = 11 \cdot 23$

$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_{2025} - a_1}{2024} = \frac{25 \cdot 625 - 25}{2024} = \frac{650}{2024} = \frac{625 - 25}{2024} = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253}$

$S = \frac{\sqrt{2625} - \sqrt{625} - \sqrt{25}}{\frac{75}{253}} = \frac{(25-5) \cdot 2024}{650} = \frac{20 \cdot 2024}{650} = \frac{4048}{65}$

Ответ: $S = \frac{4048}{65}$

$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{a_{2025} - a_1}{2024} = \frac{625 - 25}{2024} = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253}$

$S = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{\frac{75}{253}} = \frac{(25-5) \cdot 253}{75} = \frac{20 \cdot 253}{25} = \frac{4 \cdot 253}{5} = \frac{1012}{15}$

$$\begin{array}{r} 1012 \overline{) 15} \\ - 90 \\ \hline 112 \\ - 105 \\ \hline 70 \\ - 60 \\ \hline 100 \\ - 90 \\ \hline 100 \end{array}$$

Ответ: $S = \frac{1012}{15}$

1) $(1+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 \stackrel{S}{=} 100 + 20(a-b) + (a-b)^2 +$
 $+ 4 + 4(b-c) + (b-c)^2 + 9 + 6(c-a) + (c-a)^2 = 113 + 20(a-b) + 4(b-c) + 6(c-a) +$
 $+ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 113 + 24a - 16b + 2c$
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

$S = (7+a)^2 + (8-b)^2 + (c+1)^2 - 7 - 2(ab+bc+ac)$

$S = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$

$S = (a-b)(a+b+20) + (b-c)(b-c+4) + (c-a)(c-a+6) + 113$

25