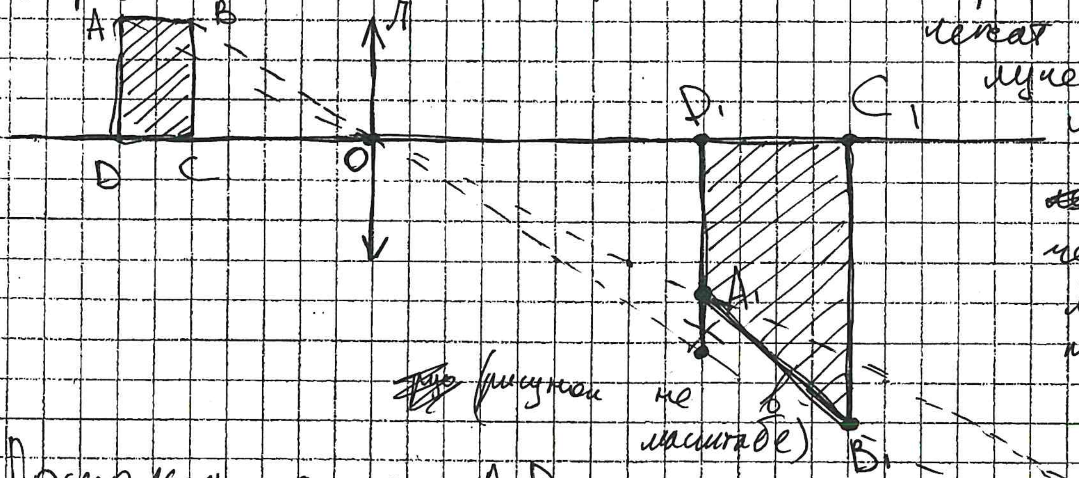
Шифр 09064

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
77б.		Червинская А.С.	Чер

Задача 1

Изобразим опт. систему:



Изобр-я точек лежат на луче, исходящем из них и проходящем через центр линзы (там он не преломляется)

(рисунок не в масштабе)

Поскольку дано $\frac{A_1D_1}{AD}=2,5$; $\frac{B_1C_1}{BC}=6$, то

из геом. рассм-я $\triangle OCB$ и $\triangle OC_1B_1$, а также $\triangle ODA$ и $\triangle OD_1A_1$ $\frac{OD}{OD_1}=2,5$; $\frac{OC}{OC_1}=6$ ($\Rightarrow OD_1=2,5OD$, $OC_1=6OC$)

С другой стороны по формуле тонкой линзы $\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\right)$

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{OC_1}=\frac{1}{F} \qquad \frac{1}{OD}+\frac{1}{OD_1}=\frac{1}{F}$$ (F — фокусн. расст-е линзы)

т.е.

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{OC_1}=\frac{1}{OD}+\frac{1}{OD_1}$$

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{6OC}=\frac{1}{OD}+\frac{1}{2,5OD}$$

$$\frac{6+1}{6OC}=\frac{2,5+1}{2,5OD}$$

$$\frac{7}{6OC}=\frac{3,5}{2,5OD}$$

$$\frac{7}{6}\frac{1}{OC}=\frac{7}{5}\frac{1}{OD}$$

$$\frac{1}{6OC}=\frac{1}{5OD}$$

$$6OC=5OD$$

$$OC=\frac{5}{6}OD$$

То есть, $DC=OD-\frac{5}{6}OD=\frac{1}{6}OD$

$D_1C_1=OC_1-OD_1=6\cdot\frac{5}{6}OD-2,5OD=5OD-2,5OD=2,5OD$

Продолжение задачи 1:

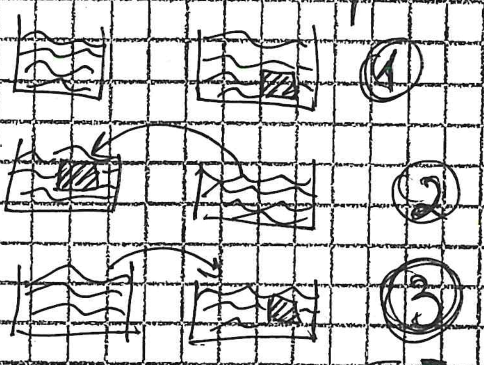
Таким образом, можно вычислить площадь $A_1B_1C_1D_1$: поскольку это прямоуг. трапеция, то площадь будет вычисл. как полусумма оснований, умноженная на высоту, то есть $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{D_1A_1 + B_1C_1}{2} \cdot D_1C_1 = \frac{BC \cdot 2{,}5 + BC \cdot 6}{2} \cdot 2{,}5\,OD = 4{,}25 \cdot 2{,}5\,OD \cdot BC$. Площадь же исходного ABCD равна $BC \cdot DC = \frac{1}{6}OD \cdot BC$. То есть отношение площадей будет равно

$$\frac{4{,}25 \cdot 2{,}5\,OD \cdot BC}{\frac{1}{6}OD \cdot BC} = 4{,}25 \cdot 2 \cdot 2{,}5 \cdot 3 = 63{,}75$$

Ответ: отношение площади изобр. и прямоуг. ABCD равно 63,75.

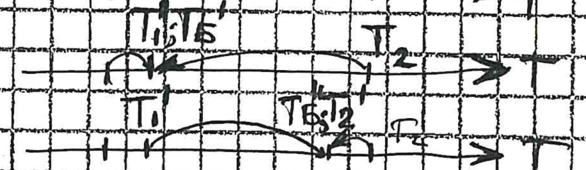
2,0

Задача 3: Рассмотрим один из таких циклов:



① ② ③

Изобразим на температурной шкале три тела – воду в 1ом сосуде, воду во 2ом сосуде и брусок (T_1, T_2 – температуры воды, $T_б$ – температура бруска)



Поскольку $Q = cm\Delta T$, то

для ①-②

$$(T_1' - T_1) \cdot c_в \cdot m_1 = (T_2 - T_1')\, c_А m_б$$

$$(T_1' - T_1) \cdot 4200 \cdot 3 = (T_2 - T_1') \cdot 900 \cdot 1$$

$$(T_2 - T_1') = 14 \cdot (T_1' - T_1)$$

Таким образом, $T_2' - T_1' =$

$$= \left(T_1' + \left(\frac{\frac{4}{3} \cdot 14}{\frac{4}{3} \cdot 14 + 1}\right) \cdot (T_2 - T_1')\right) - T_1' =$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \cdot 14}{\frac{4}{3} \cdot 14 + 1}(T_2 - T_1') = \frac{\frac{4}{3} \cdot 14}{\frac{4}{3} \cdot 14 + 1}\left(T_2 - \left(T_1 + \frac{1}{14}(T_2 - T_1)\right)\right) = \frac{\frac{4}{3} \cdot 14}{\frac{4}{3} \cdot 14 + 1}\left(T_2 - T_1 - \frac{1}{14}T_2 + \frac{1}{14}T_1\right) = \frac{4}{3} \cdot 14\left(\frac{13}{14}(T_2 - T_1)\right) = \frac{\frac{4}{3} \cdot 13}{\frac{4}{3} \cdot 14 + 1}(T_2 - T_1) = \frac{13}{14 + \frac{3}{4}}(T_2 - T_1)$$

Аналогично для ②-③:

$$(T_2' - T_2'') \cdot c_в \cdot m_2 = (T_2' - T_1) \cdot c_А \cdot m_б$$

$$(T_2' - T_2'') \cdot 4200 \cdot 4 = (T_2' - T_1)\, 900 \cdot 1$$

$$(T_2 - T_2') = (T_2' - T_1') \cdot \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot 14}$$

Продолжение задачи 3 (это чистовик, просто в полосочку)

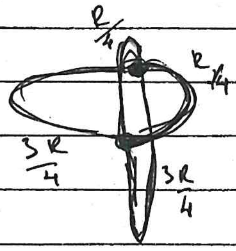
то есть $T_2'-T_1' \approx 0,881(T_2-T_1)$. То есть с каждым циклом разница ~~падает~~ меняется в 0,881 раз. То есть чтобы разница температур упала с 80°C изначально до 5°C, т.е. в 16 раз, нужно чтобы $0,881^n \le \frac{1}{16}$. Таким образом можно найти n - количество циклов, но без калькулятора я это не посчитаю

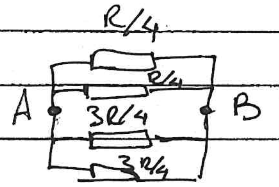
Ответ: n - ближ. нат. число, большее $\log_{0,881}\left(\frac{1}{16}\right)$ (или $[\log_{0,881}(\frac{1}{16})]+1$)

1,5б

Задача 4

Поскольку кольца имеют по условию равные радиусы, то доля дуги AB для второго кольца также $\frac{1}{4}$. То есть если обозначить за R сопр. проволоки, из которой сост. кольцо, то сопр. малых дуг будет $\frac{R}{4}$, больших - $\frac{3R}{4}$. То есть соединению двух колец эквив. схема

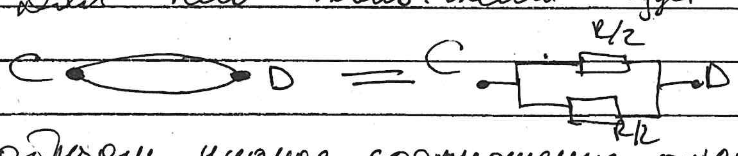




. Таким образом, поскольку при паралл. соед. проводимости (то есть величины, обр. сопротивлению) складываются, то

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R/4}+\frac{1}{R/4}+\frac{1}{\frac{3R}{4}}+\frac{1}{\frac{3R}{4}} = \frac{4}{R}+\frac{4}{R}+\frac{4}{3R}+\frac{4}{3R} = \frac{8}{R}+\frac{8}{3R} = \frac{24+8}{3R} =$$

$= \frac{32}{3R}$, то есть $R_{ab} = \frac{3}{32}R$. Вычислим теперь сопр. кольца. Для него эквив. схема будет такой:



$\frac{1}{R_к} = \frac{1}{R/2}+\frac{1}{R/2} = \frac{2}{R}+\frac{2}{R} = \frac{4}{R}$; $R_к = \frac{R}{4}$. Таким образом, искомое соотношение сопротивлений ($R_к$ - сопр. кольца) равно $\frac{R_к}{R_{ab}} = \frac{R/4}{\frac{3}{32}R} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{32}} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{3}{32}} = \frac{8}{3}$

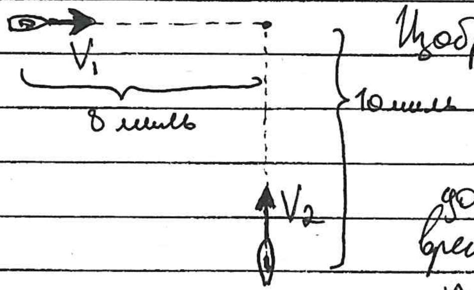
Ответ: сопротивление м/у A и B меньше сопр. кольца в $\frac{8}{3}$ раз

14б

Место для скобы

Шифр 09064

Задача 2:



Изобр. движение кораблей.
Заметим, что они движ. на 1 прямой в точке пересеч. траекторий

Запишем расст-е 1го и 2го корабля до точки пересечения траекторий от времени:

$$r_1 = 8 - 8\cdot t - \frac{at^2}{2}$$

$$r_2 = 10 - 10t - \frac{at^2}{2}$$, по усл $r_1 = 0$, $r_2 \geq 0$ и тем более, $r_2 \geq 1$

Рассмотрим крайний случай:

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8 - 8t - \frac{at^2}{2} = 0 \quad (1) \\ 10 - 10t - \frac{at^2}{2} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Рассм. (1):

$$8 - 8t - \frac{at^2}{2} = 0$$

$$\frac{at^2}{2} = 8t - 8$$

$$a = \frac{2(8t-8)}{t^2}$$. Подставим в (2): $10 - 10t - \frac{2(8t-8)}{t^2 \cdot 2} = 1$

$$10 - 10t - \frac{8t}{t^2} + \frac{8}{t^2} = 1$$

$$9 - 10t - \frac{8}{t} + \frac{8}{t^2} = 0$$

$$9t^2 - 10t^3 - 8t + 8 = 0$$

$$10t^3 - 9t^2 + 8t - 8 = 0$$

Т.к. $t > 0$, то $t \approx$ ~~...~~

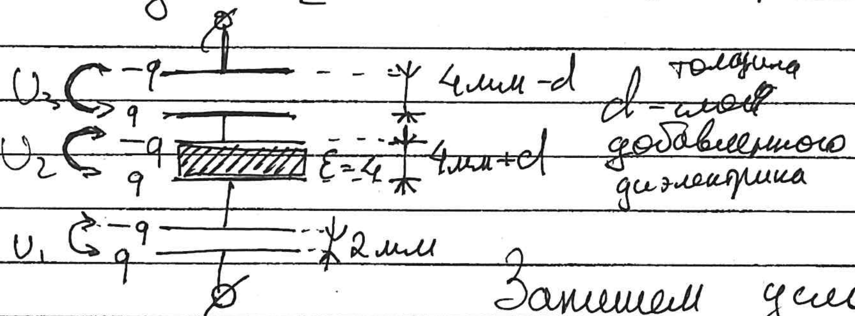
$$a = \frac{2(8t-8)}{t^2}$$

(Заметим, что $a > 0$, т.к. иначе 2е судно достигнет точки раньше)

8 б

Задача 5

Поскольку ~~в~~ при воздействии электр. поля заряды в металле перераспределяются так, чтобы поле в металле равнялось нулю, то можно „разделить" пластины на 2 заряженные поверхности с разноимёнными равными зарядами. Таким образом можно представить исходную систему ~~как~~ нескольких конденсаторов:



Запишем условие пробоя диэлектрика: $E = 20\frac{кВ}{мм} \Rightarrow U_2 = 20\frac{кВ}{мм}\cdot(4мм+d)$

Запишем ёмкости конденсаторов ~~как~~ по ф. ёмкости плоского конд: (S – пл-дь пластины)

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1};\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2};\ C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{2мм};\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{4мм+d};\ C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{4мм-d}$$

Таким обр. т.к. напр. разделится в отн., обр. отношению ёмкостей:

$$U_2 C_2 = q = U_0 \cdot C_0 = 400кВ \cdot \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$$

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{2мм}{\varepsilon_0 S}+\frac{4мм+d}{4\varepsilon_0 S}+\frac{4мм-d}{\varepsilon_0 S}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{8мм+16мм-4d+4мм+d}{4\varepsilon_0 S}} = \frac{4\varepsilon_0 S}{28мм-3d}$$

$$20\frac{кВ}{мм}(4мм+d)\cdot\frac{4\varepsilon_0 S}{4мм+d} = 400кВ\cdot\frac{4\varepsilon_0 S}{28мм-3d}$$

Место для скобы

Шифр

Продолжение задачи 5

$$20(4+d)\cdot\frac{4}{(4+d)} = 400\cdot\frac{4}{(28-3d)}$$ с точностью до размерности

$$20\cdot 4 = 400\cdot\frac{4}{(28-3d)}$$

$$20 = \frac{20\cdot 20}{(28-3d)}$$

$$\frac{20}{28-3d} = 1 \quad ; \quad 28-3d = 20$$

$$3d = 8.$$

$$d = \frac{8}{3}(мм)$$

Таким обр. надо добавить $\frac{8}{3}$мм диэлектрика, то есть его объём будет равен

$$V_Д = d\cdot S = \frac{8}{3}мм\cdot 10\cancel{0}см\cdot 10\cancel{0}см = \frac{8}{30}см\cdot 10\cancel{0}\cdot 10\cancel{0}см^2 =$$

$$= \frac{80}{3}см^3 \approx 26{,}67\,см^3$$

$\boxed{Отв: V_Д \approx 26{,}67\,см^3}$

20б