

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
195	10.03.25	Гусев Илья	
Шифр			918205

Задача 1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy = 2xy + \frac{4}{3}xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$|x-y| = \sqrt{\frac{4}{3}xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{xy}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{10}{3}xy + 2xy = \frac{16}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$|x+y| = \sqrt{\frac{16}{3}xy} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{xy}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{xy}\right)} = 2$$

Ответ: 2

Задача 2

Если $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, то мы можем представить a как $1+x$, b как $2+y$, c как $3+z$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$)

Тогда:

$$(1+x)^2 + (2+y)^2 + (3+z)^2 \geq 21$$

$$1 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot y + y^2 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot z + z^2 \geq 21$$

$$14 + 2x + x^2 + 4y + y^2 + 6z + z^2 \geq 21 \quad | -14$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z \geq 7 \quad (1)$$

Начиная с этого можно заметить, что $a+b+c \geq 7$. Подставив $a, b, c = (1+x) + (2+y) +$

$(3+z) \geq 7 \Rightarrow x+y+z \geq 1$. Докажем это от противного.

Пусть $x+y+z < 1$. Тогда $(x+y+z)^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Вычтем это неравенство из (1).

1/2/3/4/5
5/7/7/0/0

50

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

918395

$$2x + 4y + 6z > 6$$

$$6x + 6y + 6z > 2x + 4y + 6z > 6$$

$$x + y + z > 1$$

Противоречие. Значит, $x + y + z \geq 1$. ЧТД

Задача 3

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4}{n^4} + \frac{2n^3}{n^4} - \frac{2n}{n^4} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1 + 2n)}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1) \cdot (n + 1)^2}{n^4} = \frac{(n + 1)^3(n - 1)}{n^4}$$

Обозначим $(n + 1)^3$ как x_n , $(n - 1)$ как y_n , n^4 как z_n .

Итак, нам нужно найти $\prod_{i=2}^{99} a_i$

$$\prod_{i=2}^{99} a_i = \prod_{i=2}^{99} \frac{x_i \cdot y_i}{z_i} = \frac{\prod_{i=2}^{99} x_i \cdot \prod_{i=2}^{99} y_i}{\prod_{i=2}^{99} z_i}$$

$$\prod_{i=2}^{99} x_i = \prod_{i=2}^{99} (i + 1)^3 = \prod_{i=3}^{100} i^3 = \left(\prod_{i=3}^{100} i \right)^3 = \left(\frac{100!}{2!} \right)^3 = \frac{100!^3}{8}$$

$$\prod_{i=2}^{99} y_i = \prod_{i=2}^{99} (i - 1) = \prod_{i=1}^{98} i = 98!$$

$$\prod_{i=2}^{99} z_i = \prod_{i=2}^{99} i^4 = \left(\prod_{i=2}^{99} i \right)^4 = \left(\frac{99!}{1!} \right)^4 = (99!)^4$$

$$\prod_{i=2}^{99} a_i = \frac{\left(\frac{100!^3}{8} \right) \cdot 98!}{(99!)^4} = \frac{100!^3 \cdot 98!}{8 \cdot (99!)^4} = \frac{(99!)^3 \cdot 100^3 \cdot 98!}{8 \cdot (99!)^4} = \frac{100^3 \cdot 98!}{8 \cdot 99!}$$

$$= \frac{100^3}{8 \cdot 99} = \frac{50^3}{99} = \frac{125000}{99}$$

Задача 3

Нет, не всегда

70

00