

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
14		Емельянова	Евг
Шифр			043282

Задача №1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} (7+a-b)^2 \geq 0 \\ (2+b-c)^2 \geq 0 \\ (9+c-a)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 = 0$$

отсюда выразим то что

$$\begin{cases} a-b = -7 \\ b-c = -2 \\ c-a = -9 \end{cases} \Rightarrow 0 = -18 \Rightarrow P \neq 0$$

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 \rightarrow \min \text{ и отсюда при}$$

$$n_{\min} \text{ будет равна } 7^2 + 2^2 + 9^2 = 49 + 4 + 81 = 134$$

Ответ 134

Задача №2

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 - x^2 - x + 506$$

Найдем $P(x)$ в корнях $Q(x) = 0$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$x^4 = 4x^2 - x^3 - 1 \quad | \cdot x^2 \text{ обе части}$$

$$x^6 = x^2(4x^2 - x^3 - 1) = 4x^4 - x^5 - x^2$$

$$x^6 = 4(4x^2 - x^3 - 1) - x^5 - x^2$$

$$x^6 = 16x^2 - 4x^3 - 4 - x^5 - x^2$$

$$x^6 = -x^5 - 4x^3 + 15x^2 - 4$$

это подставляем в $P(x)$

$$P(x) = (-x^5 - 4x^3 + 15x^2 - 4) + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 \text{ где } x^4 = 4x^2 - x^3 - 1$$

$$P(x) = -x^5 - 4x^3 + 15x^2 - 4 + x^5 - 4(4x^2 - x^3 - 1) + x^2 - x + 506$$

$$P(x) = -x^5 - 4x^3 + 15x^2 - 4 + x^5 - 16x^2 + 4x^3 + 4 + x^2 - x + 506$$

$$P(x) = (-x^5 + x^5) + (-4x^3 + 4x^3) + (15x^2 - 16x^2 + x^2) + (-4 + 4) + (-x) + 506$$

$$P(x) = -x + 506$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 506) + (-x_2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506)$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

13282

Задача №2 продолжение

$$(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + 19 = 506$$

Используем Виета ^{каж?}

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ? - \frac{x^3}{x^4} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$-(-1) + 4 = 506 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

Задача №3

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1}}{18} = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

делаем замену $t = \sqrt{x^2+1}$

Тогда из за замены $t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$

$$t^2 - 1 - 6t + 11 = 0$$

$$t^2 - 6t + 10 = 0$$

$$D = 36 - 40$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

т.к. $t = \sqrt{x^2+1}$

$$\sqrt{x^2+1} = 3 \pm i$$

$$x^2 + 1 = (3 \pm i)^2$$

$$(3 \pm i)^2 = 9 \pm 6i + i^2 = 9 \pm 6i - 1 = 8 \pm 6i$$

$$x^2 = 8 \pm 6i - 1 = 7 \pm 6i$$

$$x = \pm \sqrt{7 \pm 6i}$$

$$t^2 - 6t + 11 - \cos \frac{t^2 - 1 + \sqrt{x^2+1}}{18} = 0$$

$$t^2 - 5 + \sqrt{2x^2}$$

А если $-1 \leq \cos t \leq 1$

то т.к. $t^2 - 6t + 11 \geq 2 \cos$

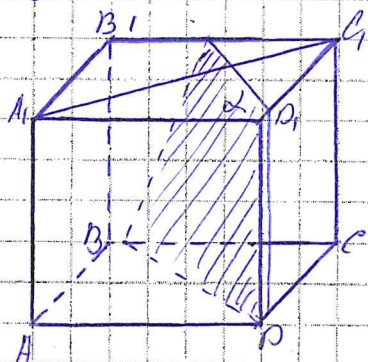
принимает от -1 до 1 то

его нет.

Ответ: $x = \pm \sqrt{7 \pm 6i}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 1^о5



$$\alpha = \overrightarrow{AC_1}, \quad \overrightarrow{AC_1} = (\alpha, \alpha, 0)$$

$$\beta = \overrightarrow{CB_1}, \quad \overrightarrow{CB_1} = (\alpha, 0, \alpha)$$

$$n_\alpha = (\alpha, \alpha, 0)$$

$$n_\beta = (0, \alpha, \alpha)$$

$$\cos \varphi = \frac{n_\alpha \cdot n_\beta}{|n_\alpha| |n_\beta|}$$

$$n_\alpha \cdot n_\beta = (\alpha, \alpha, 0) \cdot (0, \alpha, \alpha) = 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha = \alpha^2$$

$$|n_\alpha| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 0^2} = \sqrt{2}\alpha$$

$$|n_\beta| = \sqrt{0^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}\alpha$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\alpha \cdot \sqrt{2}\alpha} = \frac{\alpha^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Ответ: 60°

Задача 1^о4

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \quad \text{по условию суммы}$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \quad \text{умножаем на } n \quad \text{используем неравенство Коши}$$

$$y_i = x_i - n + 1 \quad \text{отсюда} \quad x_i = y_i + n - 1 \quad \text{Тогда}$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) = y_1 y_2 \dots y_n$$

$$y_1 y_2 \dots y_n \geq 1 \quad x_1 x_2 \dots x_n \geq n^n \quad \text{подставим } x_i = y_i + n - 1$$

$$(y_1 + n - 1)(y_2 + n - 1) \dots (y_n + n - 1) \geq n^n \quad \text{Неравенство Коши}$$

$$(y_1 + n - 1) + (y_2 + n - 1) + \dots + (y_n + n - 1) \geq \sqrt[n]{(y_1 + n - 1)(y_2 + n - 1) \dots (y_n + n - 1)}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + n(n-1) \geq \sqrt[n]{(y_1 + n - 1)(y_2 + n - 1) \dots (y_n + n - 1)}$$

$$\text{т.к. } x_1 x_2 \dots x_n \geq n^n \quad y_1 y_2 \dots y_n = 1$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Доказано