

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
140	23.03.24	Генерина	

12/3/4/5
3/4/5/1

N 1.

Давайте возьмем число абcd-четырехзначное число. Чтобы отношение было min, первые две цифры должны быть минимальными, то $a=1, b=a$ а оставшиеся две максимальными, а значит $c=9, d=9$. Попробуем еще $c=9, d=8, c=8, d=9$

$$\frac{1099}{1+9+9} = \frac{1099}{19} = 57,84 \quad \text{min} \Rightarrow 1099.$$

$$\frac{1089}{1+8+9} = \frac{1089}{18} = 60,5$$

$$\frac{1098}{18} = 61$$

(30)

Курсер -
сдвиг.

Ответ: изначальное четырехзначное число было 1099.

N 2.

$$1) 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$y^3 - x^3 > y - x$$

$$2) y^2 - x^2 > y - x$$

$$(y-x)(y+x) > y-x$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) > y-x$$

$$(y-x)(y+x) > y-x$$

$$(y-x)(y+x-1) > 0$$

знаем, что сумма $x+y \leq 1 \Rightarrow$ значит $(x+y-1) < 0$, а это значит, что

$$y-x < 0, \text{ т.к. } (+)(-) > 0 \Rightarrow y < x$$

$$(y-x)(x^2+xy+y^2-1) > 0$$

$$(y-x < 0) \Rightarrow x^2+xy+y^2-1 < 0$$

$$x^2+y^2+xy < 1$$

$$y+x-1 < 0$$

$$y+x > 0 \quad (y+x)^2 < 1^2$$

Если $y^2+x^2+2xy < 1$, то и $x^2+y^2+xy < 1$ тоже меньше 1. (ч.п.г.)

№4.

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$$

это уравнение верно, если 1) $\cos 2x = \sin x$; 2) $\cos^{2023}(2x) = \sin^{2023}(x)$

$$3) 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$$

Все 3 уравнения сводятся к решению уравнения №1.

$$\cos 2x = \sin x$$

$$\cos 2x - \sin x = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$$

Введем замену: $\sin x = t$, тогда уравнение примет вид:

$$1 - 2t^2 - t = 0$$

$$-2t^2 - t + 1 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - (-4 \cdot 2 \cdot 1) = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - 3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Ищем. ответ.

Вернемся к замене:

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

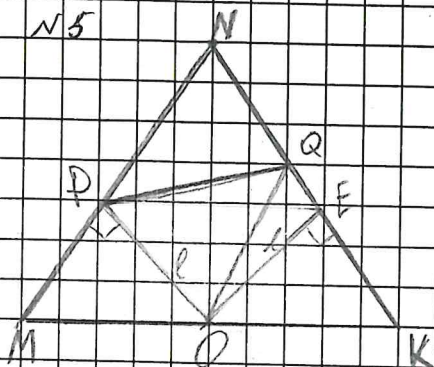
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

N5



Дано: $\triangle MNK$ - равностор., $P_A = 1$

Найти:

Решение:

Точки P и Q на окружности, центром которой является середина MK

Наибольший радиус: $R = \frac{1}{2} MK$

Наименьший радиус: r - радиус окружности, которая касается сторон MK и MN

$$P_A = 1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = OK$$

$$\text{в } \triangle OKK: \frac{r}{OK} = \sin 60^\circ \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$PQ < 2R$$

$$PQ < 2r$$

$$r < l < R$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < l < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < l < \frac{\sqrt{27}}{3} \Rightarrow \sqrt{3} < PQ < \frac{2\sqrt{27}}{3}$$

$$\text{Итак: } \sqrt{3} < PQ < \frac{2\sqrt{27}}{3}$$

N3.

$$1) P(14) = P(101) = 2024,$$

$$2) |a_0| < 999$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow P(14) - P(101) = (14 - 101)(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = -87(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$