

№

1) $0 < x < \frac{1}{2}$; $0 < y < \frac{1}{2}$

2) $y^2 - x^2 > y - x \implies y < x \implies y - x < 0 (**)$

~~Сложно доказать, что $y^2 - x^2 > y - x$ при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$. Предположим, что:~~

1) $y^2 - x^2 < y^3 - x^3$ тогда $y^3 - x^3 > y - x$

$(y-x)(y+x) < (y-x)(y^2 + xy + x^2) \quad | : (y-x)$

$y+x < y^2 + xy + x^2$

$y+x+xy < y^2 + xy + x^2 + xy$

$y+x+xy < (x+y)^2$

$y+x(1+y) < (x+y)^2$

(*) $1+y > 1$, $(x+y)^2$ всегда меньше 1,

т.е. при $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$

$(x+y)^2 = 1$, но x и y не

могут быть $\frac{1}{2}$ $\implies (x+y)^2 < 1$

3) (*) $\implies y+x(1+y) > (x+y)^2$ - верно

~~Сложно доказать, что $y^2 - x^2 > y - x$ при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$.~~

2) (***) $y^2 - x^2 > y - x$

$(y-x)(y+x) > y-x \quad | : (y-x)$ (предположим, что $y > x$)

$y+x > 1$; но по условиям $0 < x < \frac{1}{2}$; $0 < y < \frac{1}{2}$

\implies их макс. сумма будет меньше 1

$\implies y+x < 1 \implies$ предположение неверно

$\implies y < x$

3) раз $y+x(1+y) > (x+y)^2 \implies y^2 - x^2 < y^3 - x^3 \implies$ предположение верно

\implies раз $y^2 - x^2 > y - x \implies y^3 - x^3 > y - x$

что

н 4.

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2024}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$$

• т.к. при ~~увеличении~~ увеличении x $\cos(x)$ уменьшается,
то левая часть уравнения будет уменьшаться

• т.к. при увеличении x $\sin(x)$ увеличивается,
то правая часть уравнения будет увеличиваться.

⇒ слева функция, которая монотонно уменьшается,
а справа та, которая монотонно увеличивается.

⇒ уравнение будет иметь решение в.ч.с.с.

возра $f(a) = f(b)$
а = b в некотором φ -ч: $f(a) = f(\cos(2x))$

$$f(b) = f(\sin(x))$$

$$\Rightarrow f(\cos(2x)) = f(\sin(x))$$

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

$$1 - 2\sin^2(x) = \sin(x)$$

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, тогда:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-1-4}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{-\pi}{2} + 2\pi k, k, n \in \mathbb{Z}$ ✓

75