Место для скобы

Шифр 09332

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28	25.03	Корсикова Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
5	7	5	7	4	28

Задача 2.

1.) $0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $0<x+y<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow x+y-1<0$

2.) $y^2-x^2>y-x \Rightarrow (y-x)(y+x)-(y-x)>0$

$(y-x)(y+x-1)>0 \quad | : x+y-1<0$

$y-x<0$

3.) Докажем, что $y^3-x^3>y-x$

$(y-x)(y^2+xy+x^2)>y-x \quad | : y-x<0$

$y^2+xy+x^2<1$

$(x+y)^2-xy<1$

$(x+y)^2<1+xy \quad (*)$

Т.к. $x+y<1 \Rightarrow (x+y)^2<1$

$x>0$, $y>0$ $\Rightarrow$ $xy>0 \Rightarrow 1+xy>1>(x+y)^2 \Rightarrow$ неравенство $(*)$ верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходное неравенство, в силу равносильных преобразований, также верно $\Rightarrow y^3-x^3>y-x$

ч.т.д.

Место для скобы

Шифр 09332

Задание 4.

$\cos(2x)+\cos^{2023}(2x)+2024\cdot\cos^{2025}(2x)=\sin x+\sin^{2023}(x)+$
$+2024\cdot\sin^{2025}(x)$

Пусть

$f(t)=t+t^{2023}+2024t^{2025}$

Исходное уравнение принимает вид

$f(\cos(2x))=f(\sin x)$

Т.к. $f'(t)=1+2023t^{2022}+2024\cdot2025t^{2024}\geqslant 1>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(t)$ монотонно возрастает

Т.к. $f(t)$ – монотонная возрастает
$f(\cos(2x))=f(\sin x)$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x=\sin x$

$1-2\sin^2 x=\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Место для скобы

Шифр 09332

Задание 3.

1.) $P(17)=P(101)=2024$

~~Пусть $P(x)=R(x)+C$, где C - константа~~

Пусть $P(x)=R(x)+2024$, где $R(x)$ - многочлен с целыми коэфиц.

$P(17)=2024$

$P(101)=2024$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} R(17)=0 \\ R(101)=0 \end{cases} \Rightarrow x=17,\ x=101$ - корни многочлена $R(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(x)=(x-17)(x-101)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами

$R(x)=(x^2-118x+1717)\cdot Q(x)$

Пусть b_0 - свободный член многочлена $Q(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow c_0=1717b_0$, где c_0 - свободный член многочлена $R(x)$

a_0 - свободный член многочлена $P(x)$

$P(x)=R(x)+2024$ $\Rightarrow a_0=c_0+2024$

$a_0=1717b_0+2024$, где a_0 и b_0 - целые числа $\Rightarrow$

2.) $|a_0|<999 \Rightarrow -999<a_0<999$

$\Rightarrow -999<1717b_0+2024<999$ (*)

при $b_0\geq 0$, $1717b_0+2024\geq 2024>999 \Rightarrow$ неравенство (*) не выполняется

при $b_0\leq -2$, $1717b_0+2024\leq -3434+2024=-1410<-999 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство (*) не выполняется

~~т.к. $-2<b_0<0$ и b_0 - целое число $\Rightarrow b_0=-1$~~

при $b_0=-1$, $-999<0<2024-1717\leq$ ~~[illegible]~~ $307<999 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_0=-1$ подходит

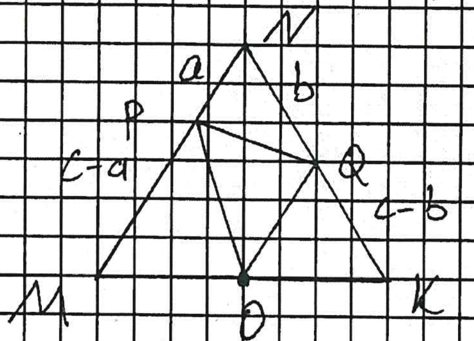
Т.к. b_0 - целое число, то были рассмотрены все возможные значения b_0.

$b_0 = -1$

$a_0 = 1717 b_0 + 2024 \Rightarrow a_0 = -1717 + 2024 = 307$

Ответ. $a_0 = 307$.

Задание 5.



Дано:

$\triangle MNK$ - равносторонний

$P \in MN$, $Q \in NK$

O - середина MK

$OP = OQ$

PQ не $\parallel MK$

$S_{MNK} = 1$

Найти:

PQ

Решение:

1. Пусть $MN = c$, $\triangle ABC$ - правильный $\Rightarrow MK = MK = MN = c$,

$\angle MNK = \angle NKM = \angle NMK = 60^\circ$

Пусть

$NP = a, NQ = b \Rightarrow MP = MN - PN = c - a$

$KQ = NK - NQ = c - b$

O - середина $MK \Rightarrow MO = OK = \frac{MK}{2} = \frac{c}{2}$

2. Теорема косинусов для $\triangle MOP$ и $\triangle OQK$ соответственно:

$PO^2 = MP^2 + MO^2 - 2MP \cdot MO \cdot \cos\angle PMO$ (1)

$QO^2 = QK^2 + OK^2 - 2QK \cdot OK \cdot \cos\angle QKO$ (2)

(!!) $PO = QO \Rightarrow PO^2 = QO^2$

Приравняем правые части равенств (1) и (2)

Место для скобы

Шифр

$$MP^2+MO^2-2MP\cdot MO\cdot\cos 60^\circ = QK^2+OK^2-2QK\cdot OK\cdot\cos 60^\circ$$

$$(c-a)^2+\frac{c^2}{4}-2(c-a)\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2}=(c-b)^2+\frac{c^2}{4}-2\cdot(c-b)\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad \Big| -\frac{c^2}{4}$$

$$c^2-2ac+a^2-\frac{c}{2}(c-a)=c^2-2bc+b^2-\frac{c}{2}(c-b) \quad \Big| -c^2$$

$$a^2-2ac-\frac{c^2}{4}+\frac{ac}{2}=b^2-2bc-\frac{c^2}{4}+\frac{bc}{2} \quad \Big| +\frac{c^2}{4}$$

$$a^2-\frac{3ac}{2}=b^2-\frac{3bc}{2}$$

$$a^2-b^2-\frac{3c}{2}(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b)-\frac{3c}{2}(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-\frac{3c}{2})=0$$

$$\left[\begin{array}{ll} a=b & (3) \\ a+b=\frac{3c}{2} & (4) \end{array}\right.$$

3. Рассмотрим равенство (3):

$$\left.\begin{array}{l} a=b \Rightarrow PN=NQ \\ MN=NK \end{array}\right| \Rightarrow MP=QK \Rightarrow \frac{NQ}{NP}=\frac{NK}{MK}$$ ~~по теореме~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow PQ \parallel MK$ (по теореме обратной теореме Фалеса)

PQ не $\parallel MK$ (по условию) $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство (3) $a=b$ невозможно

4. ~~(4)~~ Рассмотрим равенство (4):

$$b=\frac{3c}{2}-a$$

Теорема косинусов для $\triangle PNQ$:

$$PQ^2=PN^2+NQ^2-2PN\cdot NQ\cdot\cos\angle PNQ$$

$$PQ^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos 60^\circ$$

Место для скобы

Шифр

$PQ^2 = a^2 + \left(\frac{3c}{2} - a\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{3c}{2} - a\right) \cdot \frac{1}{2}$

$PQ^2 = a^2 + \frac{9c^2}{4} - 3ac + a^2 - \frac{3ac}{2} + a^2$

$PQ^2 = 3a^2 - \frac{9ac}{2} + \frac{9c^2}{4}$

Т.к. c – сторона правильного треугольника с известной площадью $\Rightarrow$ ~~$c = const$~~ c – константа

Пусть $f(a) = 3a^2 - \frac{9ac}{2} + \frac{9c^2}{4}$

Найдём абсциссу a_0 и значение в ней вершины параболы-графика $f(a)$

$a_0 = \frac{9c}{2} : (2 \cdot 3) = \frac{9c}{2 \cdot 6} = \frac{3c}{4}$

$f(a_0) = 3 \cdot \left(\frac{3c}{4}\right)^2 - \frac{9c}{2} \cdot \frac{3c}{4} + \frac{9c^2}{4} = \frac{27a^2}{16} - \frac{27a^2}{8} + \frac{9c^2}{4} = \frac{9c^2}{16}$

ветви графика $f(a)$ направлены вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \geq \frac{9c^2}{16}$

Т.к. $a + b = \frac{3c}{2}$, $a \geq 0, b \geq 0$ $\Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow D(f) = \left[0; \frac{3c}{2}\right]$ $\Rightarrow$

$a_0 = \frac{3c}{4} \in \left[0; \frac{3c}{2}\right]$ $f\downarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f(a)$~~

$f(0) = \frac{9c^2}{4}$

$f\left(\frac{3c}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3c}{2}\right)^2 - \frac{9c}{2} \cdot \frac{3c}{2} + \frac{9c^2}{4} = \frac{27c^2}{4} - \frac{27c^2}{4} + \frac{9c^2}{4} = \frac{9c^2}{4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9c^2}{16} \leq f(a) \leq \frac{9c^2}{4}$, $PQ^2 = f(a)$ $\Rightarrow \frac{9c^2}{16} \leq PQ^2 \leq \frac{9c^2}{4} \Rightarrow \frac{3c}{4} \leq PQ \leq \frac{3c}{2}$

5. $\triangle MNK$ – равносторонний $\Rightarrow$
c – длина стороны $\triangle MNK$ $\Big| \Rightarrow S_{MNK} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{MNK} = 1$ (по условию) $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

(Из пункта 4) $\frac{3c}{4} \leq PQ \leq \frac{3c}{2}$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \leq PQ \leq \sqrt[4]{27}$

Ответ: $PQ \in [\frac{\sqrt[4]{27}}{2}; \sqrt[4]{27}]$.

X

Задание 1.

Пусть $A = \overline{abcd}$ – данное число, $a \neq 0$

Тогда $S = a+b+c+d$ – сумма цифр данного числа

Отношение $\frac{\overline{abcd}}{S}$ обозначим за q

$$q = \frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d+999a+99b+9c}{a+b+c+d} = \frac{S+999a+99b+9c}{S} =$$

$$= 1 + \frac{9(111a+11b+c)}{S}$$

Т.к. a – первая цифра $\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a \geq 1$

$0 \leq b \leq 9$,
$0 \leq c \leq 9$,
$0 \leq d \leq 9$, как цифры числа $\Big| \Rightarrow 9a \geq b, 9a \geq c, 9a \geq d$

? [illegible]

$$q = 1 + \frac{9(102a+11b+c+9a)}{S} \geq 1 + \frac{9(102a+11b+c+d)}{S} = 1 + \frac{9(101a+10b+S)}{S} =$$

$$= 10 + \frac{9(101a+10b)}{S} = 10 + \frac{9(11a+10b+45a+45a)}{S} \geq 10 + \frac{9(11a+10b+5c+5d)}{S} =$$

$$\cancel{= 110a} \quad \cancel{9(11a+10a} = 10 + \frac{9(6a+5b+5S)}{S} = 55 + \frac{9(6a+5b)}{S} = 55 + \frac{54a+45b}{S} =$$

$= 55 + \frac{18a+45b+18a+18a}{S} \geq 55 + \frac{18a+45b+2c+2d}{S} = 55 + \frac{16a+43b+2S}{S} =$

$= 57 + \frac{16a+43b}{S}$

Т.к. $a \geq 1 \Rightarrow 16a \geq 1$
$b \geq 0$

$q \geq 57 + \frac{16a+43b}{S}$

$\left.\begin{array}{l} a \leq 9 \\ b \leq 9 \\ c \leq 9 \\ d \leq 9 \end{array}\right| \Rightarrow S = a+b+c+d \leq 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow \frac{36}{S} \geq 1$

при $b \geq 1$: $57 + \frac{16a+43b}{S} \geq 57 + \frac{16a+43}{S} > 57 + \frac{16a}{S} + 1 = 58 + \frac{16a}{S}$

Т.к. $\left.\begin{array}{l} a \geq 1 \\ S \geq 1 \end{array}\right| \Rightarrow 58 + \frac{16a}{S} > 58$

при $b = 0$: $57 + \frac{16a+43b}{S} = 57 + \frac{16a}{S}$ и это выражение может принимать значения меньше 58 $\Rightarrow$ значение q достигает минимума при $b = 0$

$\begin{cases} q \geq 57 + \frac{16a}{S} \\ b = 1 \end{cases}$

Т.к. $q \to q_{min} \Rightarrow \frac{16a}{S} \to min \Rightarrow a \to min,\ S \to max$

$\left.\begin{array}{l} a \to min \Rightarrow a = 1 \\ S = a+b+c+d = a+c+d \to max \end{array}\right| \Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=9,\ d=9$

$q \geq 57 + \frac{16}{1+0+9+9} = 57 + \frac{16}{19}$

Если a увеличивать в k раз, то числитель дроби $\frac{16a}{S}$ увеличится в k раз, а знаменатель не больше, чем на 9

Учитывая, что знаменатель уже больше 18, т.к. $c=d=9$, то увеличение a в k раз приведёт к увеличению значения всей дроби $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ q станет только больше

$q_{min} = 57 + \frac{16}{19} = \frac{57 \cdot 19 + 16}{19} = \frac{1083+16}{19} = \frac{1099}{19}$ $\quad A = \overline{1099} = 1099$

Ответ: 1099.