

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
24		Евгеньев	Евг
Шифр			043287

$$\textcircled{1} (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

1) Разберём выражение

$$x = 7 + a - b$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$y = 2 + b - c$$

$$z = 9 + c - a$$

2) Найдём связь между x, y, z

$$x + y + z = (7 + a - b) + (2 + b - c) + (9 + c - a)$$

$$x + y + z = 7 + 2 + 9 = 18$$

3) Минимизируем сумму квадратов

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{18^2}{3} = \frac{324}{3} = 108$$

$$x = y = z = \frac{18}{3} = 6$$

Ответ: 108

$$\textcircled{2} x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

1) Введём переменную

$$t = \sqrt{x^2+1} \quad x^2 = t^2 - 1$$

$$(t^2 - 1) - 6t + 11 - \cos \frac{(t^2 - 1) + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

$$t^2 - 6t + 10 - \cos \frac{t^2 + \sqrt{2}x - 5}{18} = 0$$

2) Определим косинус

$$\cos z = 1$$

$$t^2 - 6t + 10 - 1 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$t = \frac{6}{2} = 3$$

или

косинус

кут

взяв тангенс

знаем тангенс

косинуса

$$\cos z = -1$$

$$t^2 - 6t + 10 + 1 = 0$$

$$t^2 - 6t + 11 = 0$$

$$D = 36 - 44 = -8$$

Нет корней

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 043287

$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

Ответ: ~~$\pm 2\sqrt{2}$~~ $-2\sqrt{2}$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

x_1, x_2, x_3, x_4 — корни многочлена $Q(x)$, то $Q(x_i) = 0$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$x_i^4 = -x_i^3 + 4x_i^2 - 1$$

Выразим x_i^5 и x_i^6 через степени меньше 4:

$$\begin{aligned} x_i^5 &= x_i \cdot x_i^4 = x_i(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) = -x_i^4 + 4x_i^3 - x_i = -(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) + 4x_i^3 - x_i = \\ &= 5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i^6 &= x_i \cdot x_i^5 = x_i(5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1) = 5x_i^4 - 4x_i^3 - x_i^2 + x_i = 5(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) - 4x_i^3 - x_i^2 + x_i = \\ &= -5x_i^3 + 20x_i^2 - 5 - 4x_i^3 - x_i^2 + x_i = -9x_i^3 + 19x_i^2 + x_i - 5 \end{aligned}$$

Теперь выразим $P(x_i)$:

$$\begin{aligned} P(x_i) &= x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 + x_i^2 - x_i + 506 = (-9x_i^3 + 19x_i^2 + x_i - 5) + (5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1) - 4(-x_i^3 + 4x_i^2 - 1) + x_i^2 - x_i + \\ &= -9x_i^3 + 19x_i^2 + x_i - 5 + 5x_i^3 - 4x_i^2 - x_i + 1 + 4x_i^3 - 16x_i^2 + 4x_i + x_i^2 - x_i + 506 = \\ &= (-9+5+4)x_i^3 + (19-4-16+1)x_i^2 + (1-4-1)x_i + (-5+1+4+506) = 0x_i^3 + 0x_i^2 - x_i + 506 \end{aligned}$$

$$P(x_i) = -x_i + 506$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 506) + (x_2^2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506) = -(x_1 + x_3) + (x_2^2 + x_4) + 4 \cdot 506 =$$

$$-(x_1 + x_3 + x_4) + 2024$$

По теореме Виета:

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \text{ равна которой иценну}$$

при x^3 с обратным знаком, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 2024 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

5) Дано:

$\triangle ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб

$a \perp A_1 C_1$

$b \parallel C D_1$

Найти: наименьший угол между a и b

1) $a \perp A_1 C_1$ ее нормаль можно взять как $(-1, -1, 0)$ *почему? как ввести систему координат?*
 $b \parallel C D_1$, значит ее нормаль будет $(1, 0, -1)$

2) Угол между векторами $(-1, -1, 0)$ и $(1, 0, -1)$ равен 60° по формуле $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$

3) Так как угол между плоскостями — это

острый угол α или тупой угол β между нормальными:

$$60 - 60 = 0^\circ \text{ Ответ: } 30^\circ$$