

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
| 15         |      | Карасева    | М       |
| Шифр       |      |             | 042068  |

№1

$$x > y$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

$$(x+y)^2 - 2xy = \frac{10}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{10}{3}xy + 2xy = \frac{16}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = \frac{16}{3}xy - 4xy = \frac{4}{3}xy$$

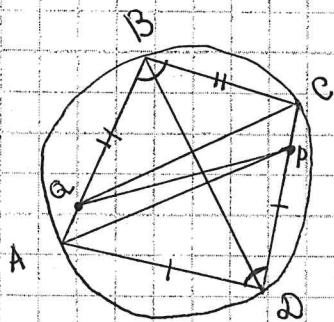
$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{16}{3}xy}{\frac{4}{3}xy} = \frac{16}{3}xy : \frac{4}{3}xy = \frac{16xy \cdot 3}{3 \cdot 4xy} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

✗

№5



Дано:

$ABCD$  - ч.-х.-уг.-к;  $ABCD$  - вписан в окружность;  $DP = AD$ ;  $BC = QB$

$BD$  делит  $PQ$  пополам - ?

Решение:

- 1) Т.к. ч.-х.-уг.-к  $ABCD$  - вписан в окружность, то  $\angle B + \angle D = 180^\circ$  и  $\angle C + \angle A = 180^\circ$



| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

2) т.к.  $DP = DA$ ,  $BQ = BC \Rightarrow \triangle DAP \sim \triangle CBQ$

3)  $BQ \cap PA = T. O$

4)  $QO = PO$ , т.к. т. P и т. Q расположены на прямых, параллельных соответствующим сторонам.

т.т.д.

✓ 2

$$a \geq 1 \quad b \geq 2 \quad c \geq 3 \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

г-Тв:  $a + b + c \geq 7$

посмотрим, что получится при минимальных значениях  $a, b$  и  $c$ .

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \geq 21$$

$14 \not\geq 21 \Rightarrow$  хотя бы одно число должно быть больше.

$$1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow a + b + c \not\geq 7 \Rightarrow a + b + c \geq 7$$

✓  $a, b, c$  т.т.д.

✓ 4

1) по Теореме Виета:

$$X^2 + pX - \frac{1}{2p^2} = 0 \quad X_1 + X_2 = -p \quad , \quad X_1 X_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

2) выразим  $X_1^4 + X_2^4$ :

$$X_1^4 + X_2^4 = (X_1^2 + X_2^2)^2 - 2X_1^2 X_2^2$$

3) выразим  $X_1^2 + X_2^2$ :

$$X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1 X_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

4) подставим в выражение:

$$X_1^4 + X_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$



| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

5) упростим выражение:

$$X_1^4 + X_2^4 = p^4 + 2 + \frac{p}{2p^4}$$

6) докажем неравенство:  $p^4 + \frac{p}{2p^4} \geq \sqrt{2}$ .

рассмотрим функцию:  $f(p) = p^4 + \frac{p}{2p^4}$

Найдем минимум функции, приравняв производную к нулю:

$$f'(p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \Rightarrow 4p^3 = \frac{2}{p^5}$$

подставим  $p = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$  в  $f(p)$ :

$$f\left(\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$p^4 + \frac{p}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

7) подставим в выражение для  $X_1^4 + X_2^4$ :

$$X_1^4 + X_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} + 2$$

Ответ: для любой  $X_1, X_2$  многочлен  $X^2 + px - \frac{p}{2p^2}$  и любого  
ненулевого значения  $p$  выполняется

$$\text{неравенство } X_1^4 + X_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

✓ 3

$$a_n = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$$

$$a_1 = 1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{13} - \frac{1}{14} = 1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \frac{1}{1} = 0$$



Открытая региональная  
межвузовская олимпиада

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

$$a_2 = 1 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^4} = 1 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}$$

$$a_3 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^4} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{128}{84}$$

$$a_2 \cdot a_3 = \frac{8}{3}$$

$$a_4 = 4 + \frac{2 \cdot 4^3}{4^4} - \frac{2 \cdot 4}{4^2} - 1 = 625 + \frac{2 \cdot 125}{625} - \frac{10}{625} - 1 = \frac{864}{625}$$

$$= 256 + \frac{128}{256} - 8 - 1 = \frac{375}{256}$$

$$a_5 = 5^4 + \frac{2 \cdot 5^3}{5^4} - \frac{2 \cdot 5}{5^2} - 1 = 625 + \frac{2 \cdot 125}{625} - \frac{10}{625} - 1 = \frac{864}{625}$$

$$a_4 \cdot a_5 = \frac{375}{256} \cdot \frac{864}{625} = \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{5}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{27}{5} = 5,4.$$

✓